Integral de Henstock-Kurzweil

Henstock-Kurzweil integral

Trabajo Fin de Grado en Matemáticas
Universidad de Málaga

Autor: Juan Manuel García Delgado

Área de conocimiento y/o departamento: Área de Análisis Matemático. Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa, y Matemática Aplicada.

Fecha de presentación: Junio 2026

Tema: Análisis Matemático

Tipo: Bibliográfico

Modalidad: Individual

Número de páginas (sin incluir introducción, bibliografía ni anexos): 56

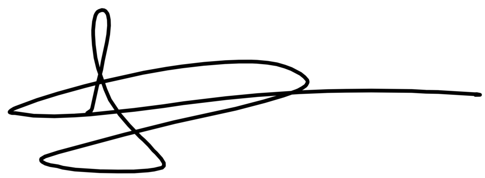
DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD DEL TFG

D. *Juan Manuel García Delgado*, con DNI *25614726V*, estudiante del Doble Grado en *Matemáticas e Ingeniería Informática* de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga,
DECLARO:

Que he realizado el Trabajo Fin de Grado titulado "*Integral de Henstock-Kurzweil*" y que lo presento para su evaluación. Dicho trabajo es original y todas las fuentes bibliográficas utilizadas para su realización han sido debidamente citadas en el mismo.

De no cumplir con este compromiso, soy consciente de que, de acuerdo con la normativa reguladora de los procesos de evaluación de los aprendizajes del estudiantado de la Universidad de Málaga de 23 de julio de 2019, esto podrá conllevar la calificación de suspenso en la asignatura, sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudiera incurrir en caso de plagio.

Para que así conste, firmo la presente en Málaga, el *5 de junio de 2025*



Fdo:..

Índice general

Integral de Henstock-Kurzweil

Resumen

Este trabajo estudia la *integral de Henstock-Kurzweil*, una generalización de la integral de Riemann que permite integrar una clase más amplia de funciones, incluyendo aquellas no integrables en el sentido de Lebesgue. Comenzamos presentando la motivación que dio lugar a esta teoría, su construcción formal mediante particiones etiquetadas adaptadas a funciones *calibre*, y las propiedades básicas que la rigen. Finalizamos el primer capítulo con una versión del *Teorema Fundamental del Cálculo* válida en este contexto.

A continuación, se explorarán las relaciones entre la integral de Henstock-Kurzweil y la integral de Lebesgue. En particular, se introduce el *Lema de Saks-Henstock* y se analizan las propiedades de la primitiva de una función integrable en el sentido de Henstock. Se estudiará en detalle cómo ambas integrales coinciden en muchos casos, aunque la de Henstock-Kurzweil resulta ser estrictamente más general. Además, se analiza su capacidad para tratar integrales impropias de manera más flexible que la teoría clásica.

En la tercera parte del trabajo se presentan varios teoremas de convergencia (uniforme, monótona, dominada) y el comportamiento de sucesiones de funciones tipo $\mathcal{P}$-Cauchy, lo cual permite establecer criterios de convergencia en el contexto de esta teoría integral más general. Finalmente, se aborda una caracterización precisa de la integral de Henstock-Kurzweil, para lo cual se introducen las clases de funciones AC_δ y ACG_δ.

Palabras clave: Integral de Henstock-Kurzweil, Integral de Riemann, Integral de Lebesgue, Particiones etiquetadas, Calibre, Teorema Fundamental del Cálculo, Lema de Saks-Henstock, Funciones AC_δ y ACG_δ

Henstock-Kurzweil integral

Abstract

This work studies the *Henstock-Kurzweil integral*, a generalization of the Riemann integral that allows for the integration of a broader class of functions, including those that are not integrable in the sense of Lebesgue. We begin by presenting the motivation that led to the development of this theory, its formal construction via tagged partitions adapted to *gauge* functions, and the basic properties that govern it. We conclude the first chapter with a version of the *Fundamental Theorem of Calculus* that holds within this framework.

Next, we explore the relationships between the Henstock-Kurzweil integral and the Lebesgue integral. In particular, we introduce the *Saks-Henstock Lemma* and analyze the properties of the primitive of a Henstock-integrable function. We examine in detail how both integrals coincide in many cases, although the Henstock-Kurzweil integral turns out to be strictly more general. Furthermore, we discuss its ability to handle improper integrals more flexibly than the classical theory.

In the third part of the work, we present several convergence theorems (uniform, monotone, dominated) and the behavior of sequences of functions of the $\mathcal{P}$-Cauchy type, which allows us to establish convergence criteria within the context of this more general integral theory. Finally, we provide a precise characterization of the Henstock-Kurzweil integral, for which we introduce the function classes AC_δ and ACG_δ.

Keywords: Henstock–Kurzweil integral, Riemann integral, Lebesgue integral, Tagged partitions, Gauge, Fundamental Theorem of Calculus, Saks–Henstock lemma, AC_δ and ACG_δ functions

Introducción

A comienzos del siglo XX, el matemático francés Henri Léon Lebesgue introdujo una nueva teoría de la integración que respondía a las crecientes necesidades del análisis matemático, ampliando significativamente el alcance de la integral de Riemann. La integral de Lebesgue permitió integrar funciones más generales, como la célebre función de Dirichlet, y facilitó la formulación y demostración de teoremas importantes, como aquellos que establecen condiciones para intercambiar el límite con la integral. A lo largo del siglo XX, la integral de Lebesgue se convirtió en una herramienta fundamental, desplazando en gran medida el uso de la integral de Riemann en el análisis avanzado.

La construcción de la integral de Lebesgue, sin embargo, es considerablemente más compleja que la de Riemann. Requiere primero desarrollar la teoría de la medida, definiendo qué es una medida y estableciendo una sobre los conjuntos de Borel de la recta real, para luego emplearla en la construcción de la integral. Aunque esta elaboración es poderosa y general, es también más laboriosa que la definición directa de la integral de Riemann.

A pesar de sus ventajas, la integral de Lebesgue presenta limitaciones. Por ejemplo, su naturaleza es absolutamente integrable: una función f es integrable en el sentido de Lebesgue si y solo si $|f|$ también lo es. Este requisito excluye algunas funciones y aplicaciones interesantes. Además, la integral de Lebesgue no se relaciona de manera sencilla con la derivabilidad: para que el Teorema Fundamental del Cálculo se cumpla de forma directa, es necesario restringirse a funciones monótonas, de variación acotada u otras condiciones especiales.

Para abordar estas limitaciones, surgieron otras teorías de integración, como las integrales de Denjoy y Perron, que amplían el marco de integrabilidad y que se basan en enfoques conceptualmente distintos. Sin embargo, sus construcciones son algo más técnicas y menos intuitivas.

En este contexto, los matemáticos Henstock y Kurzweil introdujeron una integral que supera las limitaciones de la integral de Lebesgue en el manejo de la diferenciación y los requisitos de integrabilidad absoluta. La integral de Henstock-Kurzweil es notable por su definición más sencilla y directa que las de Denjoy y Perron, y por su elegancia conceptual, ya que recupera la idea intuitiva de particiones de la integral de Riemann, a la vez que extiende significativamente su alcance.

Capítulo 1

Integral de Henstock

1. Motivación

Tradicionalmente, las dos grandes construcciones del concepto de integral en análisis real han sido la integral de Riemann y la integral de Lebesgue. La primera se basa en una intuición geométrica clara: la suma de áreas bajo la curva. Sin embargo, sus limitaciones se hacen patentes cuando se trabaja con funciones que presentan discontinuidades no acotadas o comportamientos oscilatorios intensos. La segunda, en cambio, amplía considerablemente el alcance integrable al apoyarse en la teoría de la medida, permitiendo el tratamiento adecuado de funciones más generales y asegurando excelentes propiedades de convergencia. No obstante, su construcción es bastante más técnica, y en ciertos casos no responde de forma satisfactoria a situaciones analíticamente naturales.

Por ejemplo, existen funciones derivables cuya derivada no es integrable en el sentido de Lebesgue. Consideremos la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que F es diferenciable en todo $\mathbb{R}$, pero su derivada, dada por

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

cuya gráfica se puede ver en la Figura 1.1, no pertenece a $L^1([a, b])$ en ningún intervalo que contenga el 0. Esto resulta paradójico si consideramos que la derivada aparece como el objeto integrando "natural" en el Teorema Fundamental del Cálculo.

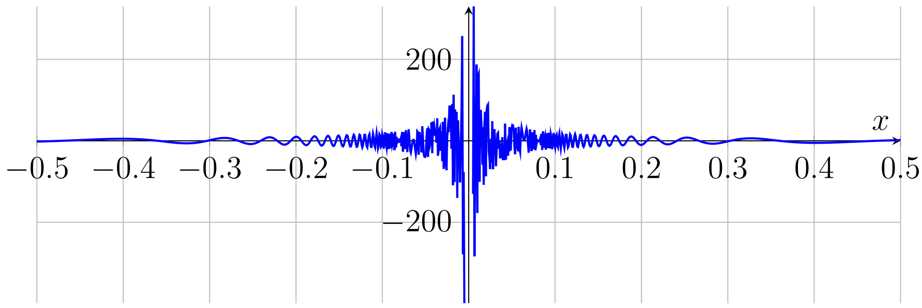


Figura 1.1: Función derivada $F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Otro ejemplo revelador es el de funciones como $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, cuya integral impropia sobre $\mathbb{R}$ converge en el sentido de Riemann impropio (y se puede calcular como π mediante herramientas de análisis complejo), pero cuyo valor absoluto no es integrable en el sentido de Lebesgue:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \infty.$$

Estas situaciones ponen de manifiesto que, si bien la integral de Lebesgue es una generalización poderosa de la de Riemann, presenta deficiencias a la hora de integrar funciones que deberían considerarse "naturales" desde el punto de vista del análisis. Además, conceptos clásicos como el cambio de variable o la integración por partes, cuya prueba en el contexto de Riemann es sencilla y directa, requieren formulaciones más complejas bajo el enfoque de Lebesgue.

Frente a esta problemática, surge la *integral de Henstock-Kurzweil* como una alternativa que subsana varias de estas limitaciones sin recurrir a la teoría de la medida. Su definición se apoya en una refinación del criterio de partición de Riemann, usando funciones de control o *calibres* que permiten adaptar el tamaño de los subintervalos al comportamiento local de la función integrando. El resultado es una teoría de integración más general que la de Lebesgue y, sin embargo, construida sobre una base más elemental y flexible.

Este enfoque permite integrar toda función derivada (aunque su derivada no sea integrable Lebesgue), así como ciertas integrales impropias no definibles en el sentido clásico. Por tanto, la integral de Henstock-Kurzweil ofrece un marco teórico más potente y más cercano al espíritu original del cálculo, lo que motiva su estudio. Sin embargo, a pesar de las limitaciones de la integral de Lebesgue, hay que reconocer que esta funciona en contextos mucho más generales que la de Henstock-Kurzweil.

2. Construcción de la integral

Para la construcción de la integral de Henstock-Kurzweil será necesario presentar una serie de conceptos básicos. Las definiciones han sido extraídas principalmente del libro *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock* [5], aunque para una mejor claridad, se ha adoptado notación de la integral de Riemann de *Calculus* [9].

Definición 1.1 (Calibre)**.** *Sea $I = [a, b]$ un intervalo, un calibre δ en I es una función $\delta : I \to (0, \infty)$, es decir, una función positiva definida en todo punto $x \in I$.*

Es relevante destacar que la función δ no es necesariamente continua ni acotada, ni tan siquiera medible, aunque puede probarse que exigir medibilidad da lugar a la misma integral. En general, puede tratarse de una función que no sea fácil de manejar. Más adelante veremos que, al igual que en la integral de Riemann, la estrategia para calcular la integral de Henstock-Kurzweil será encontrar un calibre adecuado, donde su papel será el de controlar el tamaño de los subintervalos en las particiones que utilizaremos para definir la integral.

Definición 1.2 (Intervalo etiquetado subordinado)**.** *Sea $[a, b]$ un intervalo real. Un* intervalo etiquetado *es un par $(\xi, [c, d])$ donde $[c, d] \subseteq [a, b]$ y $\xi \in [c, d]$ es la etiqueta del intervalo.*

Diremos que $(\xi, [c,d])$ *es subordinado a un calibre* δ *(o es* δ*-fino) si se cumple*

$$[c,d] \subseteq (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)).$$

Obsérvese que si el intervalo etiquetado $(\xi, [c,d])$ es subordinado a δ ha de estar contenido en un intervalo centrado en la etiqueta y de radio $\delta(\xi)$. Al conjunto de intervalos etiquetados no superpuestos lo llamaremos $\mathcal{P}$.

Definición 1.3 (Partición etiquetada subordinada)**.** *Sea* δ *un calibre en el intervalo* I*. Una partición etiquetada* $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 0 \leq i \leq n\}$ *es una colección de intervalos etiquetados no superpuestos de* I*, donde los subintervalos* $[t_i, t_{i+1}]$ *son disjuntos dos a dos salvo en los extremos, de forma que dicha partición cubre a todo* I*, es decir,* $I = \cup_{i=0}^{n}[t_i, t_{i+1}]$*. Se dice que la partición etiquetada* $\mathcal{P}$ *es subordinada a* δ *(o* δ*-fina) si cada uno de los subintervalos de la partición es subordinado a* δ*.*

Como consecuencia de esta definición:

1. Los puntos ξ_i son las etiquetas de la partición $\mathcal{P}$ y los intervalos $\{[t_i, t_{i+1}]\}$ son los intervalos de $\mathcal{P}$.

2. Si $(\xi_i, [t_i, t_{i+1}])$ es subordinado a δ para todo $i \in \{1, 2...\}$, entonces diremos que $\mathcal{P}$ es subordinada a δ.

3. Sea $E \subseteq [a,b]$. Si $\mathcal{P}$ es partición etiquetada subordinada a δ y $\xi_i \in E$, entonces diremos que $\mathcal{P}$ es partición etiquetada E-subordinada a δ.

Si δ es constante, la colección de particiones etiquetadas coincide con la usada en la definición de la integral de Riemann. La esencia de la integral de Henstock-Kurzweil radica en cómo definimos las funciones calibre.

Ejemplo 1.4. *Consideremos el intervalo* $[0,1]$*, sobre el cual vamos a construir diferentes particiones etiquetadas subordinadas a un calibre. Consideremos el calibre* $\delta(x) = 0.125 + \varepsilon$*, siendo* $\varepsilon > 0$ *y la partición*

$$\mathcal{P} = \{(0.125, [0, 0.25]), (0.375, [0.25, 0.5]), (0.625, [0.5, 0.75]), (0.875, [0.75, 1])\}$$

No es difícil comprobar que dicha partición es subordinada a δ*. De hecho, este tipo de calibres da lugar a particiones como las que se usan para la integral de Riemann, como se puede ver en la Figura 1.2.*

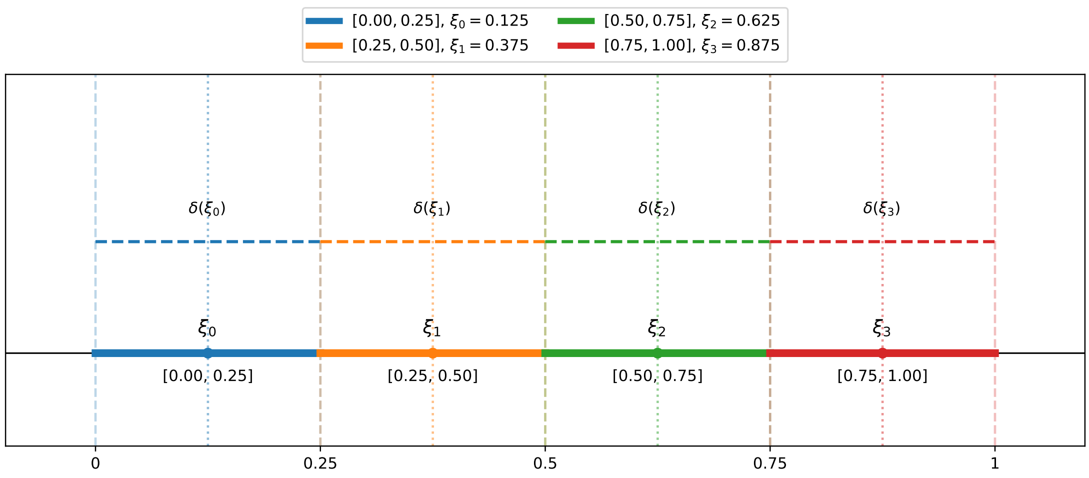


Figura 1.2: Partición etiquetada con calibre constante, intervalos de igual longitud y etiquetas centradas.

No siempre serán útiles intervalos de misma longitud y con etiquetas centradas. La Figura 1.3 *ilustra esto. Sea $\varepsilon > 0$, para el siguiente calibre, existe una partición etiquetada subordinada, donde las etiquetas no están centradas y los intervalos son de distinta longitud.*

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{máx}\{\xi_i - t_i, t_{i+1} - \xi_i\} + \varepsilon, & \textit{si } x \in [t_i, t_{i+1}] \textit{ para algún } i \in 0,1,2,3 \\ 0.01, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

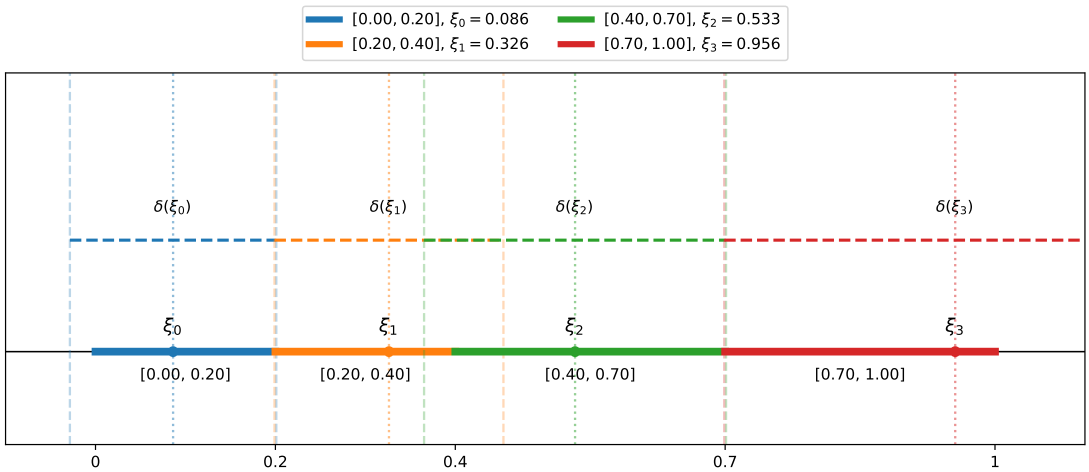


Figura 1.3: Partición etiquetada con calibre no constante e intervalos de distinta longitud.

Dado la arbitrariedad de los calibres, una lógica pregunta es si, dado un calibre δ cualquiera, existe una partición etiquetada $\mathcal{P}$ subordinada a δ. El siguiente lema garantiza dicha existencia, cuya demostración ha sido recuperada de [1].

Lema 1.5 (Cousin)**.** *Dado cualquier calibre δ en $I = [a, b]$ existe una partición etiquetada $\mathcal{P}$ de I que es subordinada a δ.*

Demostración. Damos la prueba para el intervalo $I = [0, 1]$ para facilitar la lectura. El caso general se puede demostrar de forma análoga.

Supongamos que existe un calibre δ que no admite una partición etiquetada J que es subordinada a δ. Dividamos el intervalo $I = [0, 1]$ en los intervalos $I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, en uno de los dos intervalos se debe tener que no hay una partición etiquetada subordinada a δ . De lo contrario, podríamos unir estas dos particiones etiquetadas para obtener una partición etiquetada de $I = [0, 1]$ que es subordinada a δ.

Llamemos B_1 al intervalo donde no podemos encontrar una partición etiquetada subordinada a δ, y renombremos $B_0 = I = [0, 1]$. Iterando el argumento, encontramos una sucesión de intervalos encajados $\{B_n\}$, donde $\mu(B_n) = \frac{1}{2^n}$, para $n = 0, 1, 2 \cdots$ Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que por el *Principio de los Intervalos Encajados*,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \{c\}$$

Observemos que evaluando el calibre en c, $\delta(c) > 0$ y, por otra parte, cuando $n \to \infty$ $\mu(B_n) \to 0$, luego, existe un j tal que $B_j \subset (c - \delta(c), c + \delta(c))$. Esto contradice que B_j no admitía una partición subordinada a δ y a que $\{(c, B_j)\}$ sería dicha partición. Luego, debe existir una partición etiquetada subordinada a δ. ∎

Observación. *El recíproco del Lema de Cousin se tiene de forma directa parcialmente: si existe una partición etiquetada subordinada a una función δ, entonces necesariamente dicha función debe ser positiva, al menos, en los puntos de evaluación de la partición. Esto implica que $\delta(x) > 0$ en un conjunto finito de puntos, pero no garantiza que δ sea un calibre en todo el intervalo $[a, b]$.*

Definición 1.6 (Suma de Riemann)**.** *Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de la forma $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 0 \leq i \leq n\}$ del intervalo $I = [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$. La suma de Riemann asociada de f respecto a $\mathcal{P}$ es*

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$$

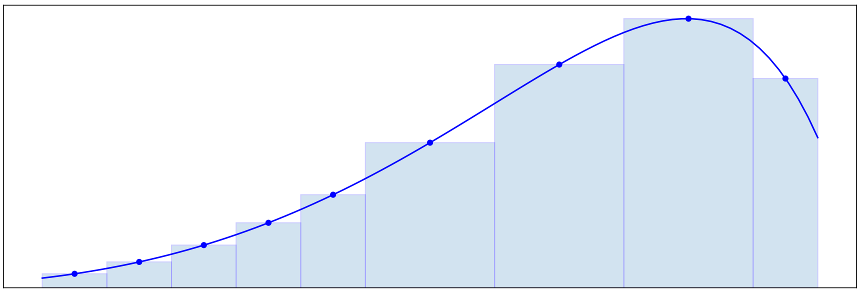


Figura 1.4: Interpretación geométrica de la suma de Riemann asociada a una partición etiquetada no uniforme.

En la Figura 1.4 se muestra la interpretación geométrica de las sumas de Riemann, que no es más que la suma del área de los rectángulos elegidos. Dada la arbitrariedad de la elección de dichos rectángulos, no se puede garantizar si dicha área será menor o mayor que el valor exacto de la integral. Ahora ya estamos en condiciones de definir la integral de Henstock-Kurzweil.

Definición 1.7 (Integral de Henstock-Kurzweil)**.** *Sea $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$, decimos que f tiene como integral de Henstock-Kurzweil en I al número real L si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibre δ en I tal que si $\mathcal{P}$ es cualquier partición etiquetada subordinada a δ entonces*

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - L| < \varepsilon.$$

De existir la integral de f en $I = [a, b]$ la denotaremos como $(H)\int_a^b f = L$, o simplemente como $\int_a^b f = L$ si se entiende por el contexto y diremos que f es integrable Henstock-Kurzweil o simplemente integrable Henstock.

Es importante destacar que, aunque utilizamos la notación $\int_a^b f$ para referirnos a la integral de Henstock-Kurzweil, en algunas ocasiones permitiremos el abuso de notación como $\int_a^b f(x)\, dx$, usando la notación típica de la integral de Riemann. Sin embargo, como se verá en el capítulo 2, la integral de Henstock-Kurzweil es una extensión de la integral de Riemann. Esto significa que toda función integrable Riemann también es integrable Henstock con el mismo valor de la integral. Por tanto, podemos permitirnos este abuso de notación sin ambigüedad, ya que el resultado es consistente en ambos casos.

Con una demostración parecida a la que se da para la integral de Riemann, se puede garantizar que el número L es único en caso de existir. Para probar esta propiedad de unicidad, necesitaremos previamente un lema.

Lema 1.8. *Sean dos calibres δ_1 y δ_2 sobre $I = [a, b]$, cumpliendo que $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Dada una partición etiquetada $\mathcal{P}$ subordinada a δ_1, se cumple que $\mathcal{P}$ es subordinada a δ_2.*

Demostración. Consideremos $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 0 \leq i \leq n\}$ partición etiquetada subordinada a δ_1. En particular, como cada intervalo es subordinado a δ_1, se tiene que $[t_i, t_{i+1}] \subseteq (\ \xi_i - \delta_1(\xi_i), \xi_i + \delta_1(\xi_i))$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n$. Esta definición de intervalo subordinado se puede escribir como:

$$t_{i+1} - t_i \leq 2\delta_1(\xi_i) \text{ para todo } i \text{ tal que } 0 \leq i \leq n.$$

Como $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se verifica que $\delta_1(\xi_i) \leq \delta_2(\xi_i)$. Recuperando la ecuación anterior,

$$t_{i+1} - t_i \leq 2\delta_1(\xi_i) \leq 2\delta_2(\xi_i) \text{ para todo } i \text{ tal que } 0 \leq i \leq n$$

y en consecuencia, $\mathcal{P}$ es partición etiquetada subordinada a δ_2. ■

Este resultado es útil a la hora de refinar calibres: garantiza que toda partición subordinada a un calibre más restrictivo sigue siendo válida para uno más laxo. En particular, permite comparar sumas de Riemann asociadas a diferentes calibres sin perder la subordinación.

Teorema 1.9. *Dada una función $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Henstock-Kurzweil, su integral $\int_a^b f$ es única.*

Demostración. Supongamos que f tiene como integral en el sentido Henstock-Kurzweil a los reales A y B. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe δ_1 calibre tal que para toda partición etiquetada $\mathcal{P}_1$ subordinada a δ_1

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De nuevo, existe δ_2 calibre tal que para toda partición etiquetada $\mathcal{P}_2$ subordinada a δ_2

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_2) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos ahora el calibre $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada subordinada a δ, que sabemos que existe por el *Lema de Cousin*. Entonces, por el lema previo, como $\delta(x) \leq \delta_1(x)$ y $\delta(x) \leq \delta_2(x)$ para todo $x \in I$, $\mathcal{P}$ es subordinada tanto a δ_1 como a δ_2. Teniendo esto en cuenta

$$|A - B| \leq |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - A| + |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, haciendo $\varepsilon \to 0^+$, tenemos que $A = B$, y por tanto, el valor de la integral es único. ■

3. Propiedades básicas

Teorema 1.10. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f = 0$ en $[a, b]$ excepto en un conjunto numerable de puntos, se tiene que f es integrable Henstock-Kurzweil y que $\int_a^b f = 0$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Usando este conjunto definimos un calibre sobre $[a, b]$ adecuado para probar la integrabilidad de la función:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \setminus A \\ \frac{\varepsilon}{2^{n+1} \cdot |f(a_n)|} & x \in A. \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 0 \leq i \leq n\}$ partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ, que existe por el *Lema de Cousin*. Sea Π el conjunto de índices tales que la etiqueta $\xi_i \in A$. En ese caso, se toma n_i tal que $\xi_i = a_{n_i}$. Sea Ω el conjunto de índices tal que $\xi_i \notin A$. Se tiene que para todo $i \in \Omega$, $f(\xi_i) = 0$. Teniendo esto en cuenta, y que

$$t_{i+1} - t_i \leq 2 \cdot \delta(a_{n_i}) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{n_i+1} |f(a_{n_i})|}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - 0| &= \left| \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i \in \Omega} f(\xi_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) + \sum_{i \in \Pi} f(\xi_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i \in \Pi} f(\xi_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) \right| \\ &\leq \sum_{i \in \Pi} |f(a_{n_i})| \frac{2\varepsilon}{2^{n_i+1} |f(a_{n_i})|} \\ &= \sum_{i \in \Pi} \frac{\varepsilon}{2^{n_i}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así pues, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que f es integrable Henstock-Kurzweil y $\int_a^b f = 0$. ■

El teorema anterior nos dice que si $f = 0$ en $[a, b]$ excepto en un conjunto numerable de puntos, entonces f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y su integral vale cero. Este teorema será de utilidad para probar las típicas propiedades de linealidad que verifican la conocida integral de Riemann, y que intuitivamente se cumplen en la integral de Henstock-Kurzweil.

Ahora ya estamos en condiciones de introducir un primer ejemplo. Veamos cómo actúa la integral de Henstock-Kurzweil sobre la conocida función de Dirichlet, la cual, como bien sabemos, no es integrable en sentido Riemann (ver apéndice A, ejemplo A.6).

Ejemplo 1.11. *Sea la función de Dirichlet* $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Aplicando el Teorema 1.10, dado que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *es numerable, se tiene que* h *es integrable en el sentido Henstock-Kurzweil.*

El Teorema 1.10 muestra que la función de Dirichlet es integrable Henstock-Kurzweil en [0,1] y que su integral es 0. Por lo tanto, una función que es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil no tiene que ser continua en ningún punto.

Teorema 1.12. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Si* $f = 0$ *en casi todo punto de* $[a, b]$*, entonces* f *es integrable en el sentido de Henstock en* $[a, b]$ *y* $\int_a^b f = 0$.

Demostración. Sea $E = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$ y para cada entero positivo n, sea $E_n = \{x \in E : n - 1 \leq |f(x)| < n\}$. Es claro que $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y que estos conjuntos son disjuntos dos a dos y cada uno tiene medida cero. Para cada n, tomamos un conjunto abierto O_n tal que $E_n \subset O_n$ y $\mu(O_n) < \frac{\varepsilon}{n2^n}$. Consideremos el calibre δ definido en $[a, b]$ por

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a, b] - E \\ \rho(x, \mathcal{C}O_n), & \text{si } x \in E_n. \end{cases}$$

donde $\mathcal{C}O_n$ denota el complemento de O_n, es decir, $\mathcal{C}O_n = [a, b] \setminus O_n$, y $\rho(x, \mathcal{C}O_n)$ es la distancia de x al complemento de O_n, o sea, la distancia del punto x al exterior del abierto O_n. Dado que $\rho(x, \mathcal{C}O_n) > 0$ para todo $x \in E_n$, la función calibre δ siempre es positiva y por tanto está bien definida.

Supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ que es subordinada a δ. Para cada n, sea $\mathcal{P}_n$ el subconjunto de $\mathcal{P}$ que tiene etiquetas en E_n. Si (x_I, I) es un intervalo etiquetado en $\mathcal{P}_n$, entonces $(x_I - \delta(x_I), x_I + \delta(x_I)) \subset O_n$ debido a cómo definimos δ. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - 0| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{(x_I, I) \in \mathcal{P}_n} f(x_I)\mu(I) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(x_I, I) \in \mathcal{P}_n} |f(x_I)|\mu(I) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(x_I, I) \in \mathcal{P}_n} n\mu(I) = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{(x_I, I) \in \mathcal{P}_n} \mu(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(O_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y $\int_a^b f = 0$. ■

Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil sobre $[a, b]$ y que $\varepsilon > 0$. Entonces, existe un calibre δ tal que, si $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ, se cumple que:

$$\left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos particiones etiquetadas de $[a, b]$ subordinadas a δ. Entonces, tenemos que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_2)| \leq \left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_1) - \int_a^b f \right| + \left| \int_a^b f - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_2) \right| < \varepsilon,$$

lo cual es análogo al criterio de Cauchy que conocimos para la integral de Riemann [5, Th. 4.29]. Vamos a ver que la integral de Henstock-Kurzweil se caracteriza también por esta condición de Cauchy. Esto nos permite introducir el siguiente teorema.

Teorema 1.13 (Criterio de Cauchy). *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibre δ en $[a, b]$ tal que $|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_2)| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ sean particiones etiquetadas de $[a, b]$ subordinadas a δ.*

Demostración. Ya hemos demostrado que la integrabilidad de f implica el criterio de Cauchy. Por lo tanto, asumimos ahora que se cumple el criterio de Cauchy y probaremos que f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, por hipótesis, existe un calibre δ_k tal que, si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son particiones etiquetadas subordinadas a δ_k, entonces

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_2)| < \frac{1}{k}.$$

Consideramos la función

$$\tilde{\delta}_k(x) := \text{mín}\{\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_k(x)\},$$

la cual también es un calibre. Cualquier partición etiquetada subordinada a $\tilde{\delta}_{k+1}$ lo es también a $\tilde{\delta}_k$, pues $\tilde{\delta}_{k+1} < \tilde{\delta}_k$, bastaría aplicar el Lema 1.8. Para cada k, tomamos una partición etiquetada $\mathcal{P}_k$ subordinada a $\tilde{\delta}_k$, y denotamos $A_k := \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_k)$. Si $j > k$, entonces $\mathcal{P}_j$ también está subordinada a $\tilde{\delta}_k$, y por tanto

$$|A_k - A_j| = |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_k) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_j)| < \frac{1}{k}.$$

La sucesión $\{A_k\}$ es entonces de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio completo, toda sucesión de Cauchy converge, por lo que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $A_k \to A$.

Fijamos $\varepsilon > 0$. Como $A_k \to A$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $|A_k - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Elegimos $K > \text{máx}\{k_0, \frac{2}{\varepsilon}\}$. Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ_K. Entonces,

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - A| \leq \underbrace{|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - A_K|}_{\text{criterio de Cauchy}} + \underbrace{|A_K - A|}_{\text{convergencia de } A_k} < \frac{1}{K} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto demuestra que f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a, b]$. ■

Teorema 1.14. *Sea f y g funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a, b]$. Entonces,*

a) cf es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$, para cada $c \in \mathbb{R}$.

b) $f + g$ es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

c) Si $f \leq g$ en casi todo punto de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Demostración.

a) Sea $\varepsilon > 0$. El resultado para $c = 0$ es trivial. Supongamos $c \neq 0$. Se tiene que f es integrable Henstock-Kurzweil, por tanto, para todo $\frac{\varepsilon}{|c|}$, existe δ calibre tal que para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}$ subordinada a δ, se tiene que

$$\left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Con esto, se tiene que

$$\left|\mathcal{S}(c \cdot f, \mathcal{P}) - c\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} c \cdot f\left(\xi_i\right)\left(t_{i+1} - t_i\right) - c\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq |c|\left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_a^b f\right| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Así, como ε era arbitrario, esto nos da la propiedad que queríamos probar.

b) Sea $\varepsilon > 0$. Como f y g son integrables Henstock-Kurzweil por definición, se tiene que para $\frac{\varepsilon}{2}$ existen dos funciones calibres δ_f y δ_g tal que para cualquiera particiones etiquetadas $\mathcal{P}_f$ y $\mathcal{P}_g$ subordinadas a δ_f y δ_g respectivamente, se tiene que

$$\left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_f) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_g) - \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1}$$

Consideremos el calibre $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Observemos que para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f+g, \mathcal{P}) &= \sum_{i=0}^{n}(f+g)\left(\xi_i\right) \cdot \left(t_{i+1} - t_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f\left(\xi_i\right) \cdot \left(t_{i+1} - t_i\right) + \sum_{i=0}^{n} g\left(\xi_i\right) \cdot \left(t_{i+1} - t_i\right) \\ &= \mathcal{S}(f, \mathcal{P}) + \mathcal{S}(g, \mathcal{P}).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada subordinada a δ. Por el Lema 1.8 la partición es subordinada a δ_f y a δ_g. Teniendo en cuenta esto, por (1.1) y (1.2),

$$\left|\, \mathcal{S}(f+g, \mathcal{P}) - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right)\right| \leq \left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_a^b f(x)dx\right| +$$

$$+\left|\mathcal{S}(g, \mathcal{P}) - \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

c) Supongamos que $f \geq 0$ en casi todo punto de $[a, b]$. Recordemos que definimos la parte positiva y negativa de una función como $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ y $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ para todo $x \in [a, b]$ respectivamente. Entonces, dado que $f^- = 0$ en casi todo punto de $[a, b]$, es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ por el Teorema 1.12 y $\int_a^b f^- = 0$. Por (b), la función $f^+ = f + f^-$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$. Dado que $f^+ \geq 0$ en $[a, b]$, es evidente que $\int_a^b f^+ \geq 0$ (pues las sumas de Riemann son siempre no negativas). Por tanto, por (a) y (b),

$$\int_a^b f = \int_a^b \left(f^+ - f^-\right) = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- = \int_a^b f^+ \geq 0.$$

El resultado general se sigue ahora ya que $g - f \geq 0$ en casi todo punto de $[a, b]$ implica

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f) \geq 0.$$

■

Teorema 1.15. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y* $c \in (a, b)$.

a) *Si* f *es integrable Henstock-Kurzweil en* $[a, c]$ *y* $[c, b]$*, entonces* f *es integrable Henstock-Kurzweil en* $[a, b]$ *y* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

b) *Si* f *es integrable Henstock-Kurzweil en* $[a, b]$*, entonces es integrable Henstock-Kurzweil en cualquier subintervalo* $[p, q] \subset [a, b]$.

Demostración.

a) Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe un calibre δ_1 en $[a, c]$ tal que $\left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_a^c f\right| < \varepsilon/2$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada de $[a, c]$ subordinada a δ_1. De igual forma, existe un calibre δ_2 en $[c, b]$ tal que $\left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_c^b f\right| < \varepsilon/2$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada de $[c, b]$ subordinada a δ_2. Definimos δ en $[a, b]$ mediante

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{mín}\left\{\delta_1(x), c - x\right\}, & \text{si } a \leq x < c \\ \text{mín}\left\{\delta_1(c), \delta_2(c)\right\}, & \text{si } x = c \\ \text{mín}\left\{\delta_2(x), x - c\right\}, & \text{si } c < x \leq b \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ. Notemos que $\mathcal{P}$ debe ser de la forma $\mathcal{P}_a \cup (c, [u, v]) \cup \mathcal{P}_b$, donde las etiquetas de $\mathcal{P}_a$ son menores que c y las etiquetas de $\mathcal{P}_b$ son mayores que c. Veamos ahora que c necesariamente es etiqueta. Sea $(\gamma, [\alpha, \beta])$ el intervalo etiquetado tal que $c \in [\alpha, \beta]$. Tenemos entonces que

$$[\alpha, \beta] \subset (\gamma - (\gamma - c), \gamma + (\gamma - c)).$$

Por la definición de δ tenemos que si $\gamma > c$ entonces

$$\delta(\gamma) = min\{\delta_2(\gamma), \gamma - c\} \leq \gamma - c$$

de manera que

$$[\alpha, \beta] \subset (\gamma - (\gamma - c), \gamma + (\gamma - c)) = (c, 2\gamma - c)$$

lo cual es una contradicción ya que $c \in [\alpha, \beta]$. Análogamente, si $\gamma < c$ tenemos también una contradicción. Por tanto, necesariamente, $\gamma = c$.

Sea $\mathcal{P}_1$ partición etiquetada de $[a, c]$ subordinada a δ_1 y sea $\mathcal{P}_2$ partición etiquetada de $[c, b]$ subordinada a δ_2. Dado que $\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) = \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_1) + \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_2)$,

$$\left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_a^c f - \int_c^b f\right| \leq \left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_1) - \int_a^c f\right| + \left|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_2) - \int_c^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, la función f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

.

b) Supongamos que f es integrable en el sentido de Henstock en $[a, b]$. Queremos probar que f es integrable en el sentido de Henstock en cada subintervalo de $[a, b]$.

Sea $[p, q] \subset [a, b]$ un subintervalo cerrado arbitrario y sea $\varepsilon > 0$. Dado que f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a, b]$, existe un calibre δ en $[a, b]$ tal que, por el criterio de Cauchy, para todas las particiones etiquetadas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ de $[a, b]$ subordinadas a δ, se cumple que

$$|S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_2)| < \varepsilon.$$

Sea ahora δ' un calibre definido restringiendo δ al subintervalo $[p, q]$, es decir, $\delta' = \delta|_{[p,q]}$. Supongamos que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son particiones etiquetadas de $[p, q]$ subordinadas a δ'.

Extendiéndolas a particiones etiquetadas $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{E}'$ de $[a, b]$ incluyendo una partición cualquiera de los intervalos $[a, p]$ y $[q, b]$, se obtiene que $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{E}'$ son particiones etiquetadas de $[a, b]$ subordinadas a δ. Como $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{E}'$ coinciden fuera del subintervalo $[p, q]$, es decir, contienen exactamente los mismos pares etiquetados en $[a, p] \cup [q, b]$, se tiene que

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{D}') = \mathcal{S}(f, \mathcal{D}) + \mathcal{S}(f, \mathcal{R}),$$
$$\mathcal{S}(f, \mathcal{E}') = \mathcal{S}(f, \mathcal{E}) + \mathcal{S}(f, \mathcal{R}),$$

donde $\mathcal{R}$ denota la parte común de ambas particiones fuera de $[p, q]$. Al restar estas expresiones, se concluye que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{D}) - \mathcal{S}(f, \mathcal{E})| = |\mathcal{S}(f, \mathcal{D}') - \mathcal{S}(f, \mathcal{E}')| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es integrable en el sentido de Henstock en $[p, q]$. Como $[p, q]$ es un subintervalo arbitrario de $[a, b]$, concluimos que f es integrable en el sentido de Henstock Kurzweil en cada subintervalo de $[a, b]$. ■

Teorema 1.16. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$. Si $f = g$ en casi todo punto de $[a, b]$, entonces la función g es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

Demostración. La función $g - f = 0$ en casi todo punto es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ por el Teorema 1.12. Además, por el Teorema 1.10 se tiene que $\int_a^b (g - f) = 0$. Ahora, por el apartado (b) del Teorema 1.14, la función $g = f + (g - f)$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b (g - f) = \int_a^b f.$$

Esto concluye la demostración. ■

4. Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo es uno de los resultados más importantes del análisis matemático, ya que establece una conexión profunda entre las nociones de derivada e integral. Antes de enunciar y demostrar este teorema, es conveniente realizar una breve introducción a las sumas telescópicas, cuya estructura sirve como una analogía útil para comprender el TFC. Consideremos la siguiente serie:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Determinar su valor puede parecer complicado, pero al aplicar una estrategia adecuada, la solución se simplifica. Reescribamos cada término como una diferencia de fracciones sucesivas:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ =1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Este tipo de sumas, conocidas como *sumas telescópicas*, destacan por su capacidad de simplificación, ya que los términos intermedios se cancelan, dejando únicamente los extremos. Esta idea es una herramienta conceptual que también aparece, de forma generalizada, en el contexto de las integrales definidas y será útil, en particular, en la prueba del Teorema Fundamental del Cálculo, si $F'(x)=f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Teorema 1.17 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función derivable en cada punto del intervalo* $I=[a,b]$ *y* $F'=f$*. Entonces, la función* f *es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil y se verifica que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Demostración. Sea $\varepsilon>0$ y consideremos un punto $t\in I$. Aplicando la definición de derivabilidad en un punto, si tomamos un $\tilde{\varepsilon}>0$ por elegir, sabemos que existe un calibre $\delta_{\tilde{\varepsilon}(t)}$ tal que, para todo $z\in I$ con $0<|z-t|\leq\delta_{\tilde{\varepsilon}}(t)$, se cumple:

$$\left|\frac{F(z)-F(t)}{z-t}-f(t)\right|\leq\tilde{\varepsilon}.$$

Esto implica que:

$$|F(z)-F(t)-f(t)(z-t)|\leq\tilde{\varepsilon}|z-t|.$$

Si tomamos puntos $a\leq u\leq t\leq v\leq b$ con $v-u\leq\delta_{\tilde{\varepsilon}}(t)$, se tiene:

$$\begin{aligned}|F(v)-F(u)-f(t)(v-u)| &\leq |F(v)-F(t)-f(t)(v-t)|\\ &\quad+|F(t)-F(u)-f(t)(t-u)|\\ &\leq (v-t)\tilde{\varepsilon}+(t-u)\tilde{\varepsilon}=(v-u)\tilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Sea ahora una partición etiquetada $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 0 \leq i \leq n\}$ del intervalo I subordinada a $\delta_{\tilde{\varepsilon}}$. Podemos expresar $F(b) - F(a)$ como una suma telescópica:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n} \big(F(t_{i+1}) - F(t_i)\big)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |F(b) - F(a) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P})| &= \left| \sum_{i=0}^{n} \big(F(t_{i+1}) - F(t_i) - f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)\big) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} |F(t_{i+1}) - F(t_i) - f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \tilde{\varepsilon}(t_{i+1} - t_i) = \tilde{\varepsilon}(b - a) \end{aligned}$$

Sea $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a}$, entonces, tenemos que

$$|F(b) - F(a) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P})| < \varepsilon$$

y dado que ε es arbitrario, concluimos que

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

$\blacksquare$

Tras probar el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil, podemos dar un teorema aún más fuerte, aunque para ello primero necesitamos algunas definiciones.

Definición 1.18 (Subpartición etiquetada)**.** *Sea $I = [a, b]$ un intervalo. Una subpartición $\{J_k\}_{k=1}^{s}$ es una colección de subintervalos $J_k \subseteq [a, b]$ que no necesariamente contiene subintervalos con extremos en a o b. Una subpartición etiquetada es una colección de puntos ξ_k y de subparticiones $\{J_k\}_{k=1}^{s}$ tales que $\xi_k \in J_k$ para cada $k \in 1, ..., s$. Lo denotaremos como $\mathcal{P}_0 = \{(\xi_k, J_k) : 0 \leq k \leq s\}$.*

Definición 1.19 (Subpartición etiquetada subordinada a δ)**.** *Sea $I = [a, b]$ un intervalo. Si δ es un calibre en I, decimos que la subpartición etiquetada $\mathcal{P}_0 = \{(\xi_k, J_k) : 0 \leq k \leq s\}$ es subordinada a δ (o δ-fina) si $J_k \in (\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k))$ para todo $k \in 1, ..., s$.*

Observación. *Nótese que una subpartición etiquetada, a diferencia de una partición etiquetada, no tiene por qué cubrir todo el intervalo $[a, b]$. Es decir, puede haber regiones del intervalo donde no se ha definido ningún subintervalo J_k. Esta flexibilidad es útil, por ejemplo, para construir sumas aproximadas locales o en pruebas que requieren análisis por partes.*

Ejemplo 1.20. *Sea $I = [0, 1]$. Consideramos la subpartición etiquetada*

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ \left(\frac{1}{8}, \left[0, \frac{1}{4}\right]\right), \left(\frac{3}{4}, \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \right\}.$$

En este caso, $\mathcal{P}_0$ no cubre el subintervalo $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, por lo que no representa una partición etiquetada de $[0, 1]$, sino una subpartición etiquetada. Aun así, puede utilizarse para aproximar la integral de Henstock en parte del dominio.

Definición 1.21 (Suma asociada)**.** *Sea $\mathcal{P}_0 = \{(\xi_i, [a_i, b_i]) : 0 \leq i \leq n\}$ una subpartición etiquetada de un intervalo $[a, b]$. Dada una función F definida sobre $[a, b]$, definimos la suma asociada a F respecto a $\mathcal{P}_0$ como*

$$F(\mathcal{P}_0) = \sum_{i=0}^{n} (F(b_i) - F(a_i))$$

Definición 1.22 (Medida de una subpartición etiquetada)**.** *Sea $\mathcal{P}_0 = \{(\xi_i, [a_i, b_i]) : 0 \leq i \leq n\}$ una subpartición etiquetada, definimos la medida de una subpartición etiquetada como*

$$\mu(\mathcal{P}_0) = \sum_{i=0}^{n} (b_i - a_i)$$

Observación. *Las definiciones anteriores también son aplicables en el caso de que se trate de una partición etiquetada. Si $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 0 \leq i \leq n\}$ es una partición etiquetada, entonces la medida de la partición coincide con la longitud total del intervalo, es decir, $\mu(\mathcal{P}) = b - a$, y la suma asociada a una función F se reduce a la diferencia de extremos $F(b) - F(a)$, ya que*

$$F(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n} (F(t_{i+1}) - F(t_i)) = F(b) - F(a).$$

Observación. *Las definiciones de suma asociada y de medida pueden aplicarse también, sin pérdida de generalidad, a colecciones finitas de intervalos del tipo $\{[a_i, b_i]\}_{i=0}^{n}$, es decir, a subconjuntos del intervalo $[a, b]$ formados por uniones finitas de intervalos disjuntos, dado que la etiqueta no interviene en las definiciones.*

Teorema 1.23. *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si F es derivable en $[a, b]$ excepto en un conjunto numerable de puntos, entonces F' es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y se verifica que*

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $C = \{c_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ el conjunto de puntos de $[a, b]$ en los cuales F' no existe. Por convención, definimos $F'(x) = 0$ para $x \in C$. Sea $\tilde{\varepsilon} > 0$ por elegir, y definimos un calibre δ sobre $[a, b]$ de la siguiente manera:

1. Si $x \in [a, b] - C$, utilizamos la existencia de $F'(x)$ para elegir un $\delta(x) > 0$ tal que, para cualquier $u \in [a, b]$ con $u \in (x - \delta(x), x + \delta(x))$,

$$|F(u) - F(x) - F'(x)(u - x)| \leq \tilde{\varepsilon}|u - x|.$$

   Observese que en este caso procedemos de igual forma que en el teorema anterior.

2. Si $x = c_n \in C$, por hipótesis, F es continua en $[a, b]$, luego utilizando la continuidad de F en x elegimos un $\delta(x) > 0$ tal que, para cualquier $u, v \in [a, b]$ con $u, v \in (x - \delta(x), x + \delta(x))$,

$$|F(v) - F(u)| < \tilde{\varepsilon} 2^{-n}.$$

Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ. Definimos dos subparticiones etiquetadas de $\mathcal{P}$:

1. $\mathcal{P}_c$ es la subpartición etiquetada que tiene subintervalos cuya etiqueta pertenece a C.

2. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} - \mathcal{P}_c$ es la subpartición etiquetada que tiene subintervalos cuya etiqueta no pertenece a C.

Para cada $(x, [u, v]) \in \mathcal{P}_1$, se cumple que

$$\begin{aligned} |F(v) - F(u) - F'(x)(v-u)| &\leq |F(v) - F(x) - F'(x)(v-x)| \\ &\quad + |F(x) - F(u) - F'(x)(x-u)| \\ &\leq \tilde{\varepsilon}(v-x) + \tilde{\varepsilon}(x-u) \\ &= \tilde{\varepsilon}(v-u). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $(c_n, [u, v]) \in \mathcal{P}_c$, entonces $|F(v) - F(u)| < \tilde{\varepsilon}2^{-n}$. Sea π el conjunto de los índices n donde c_n es etiqueta de $\mathcal{P}$. Ahora, como $F(b) - F(a) = F(\mathcal{P}) = F(\mathcal{P}_c) + F(\mathcal{P}_1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} |F'(\mathcal{P}) - (F(b) - F(a))| &= |F'(\mathcal{P}_c) + F'(\mathcal{P}_1) - F(\mathcal{P}_c) - F(\mathcal{P}_1)| \\ &\leq |F(\mathcal{P}_1) - F'(\mathcal{P}_1)| + |F(\mathcal{P}_c)|. \end{aligned}$$

Por un lado, $|F(\mathcal{P}_c)| \leq \tilde{\varepsilon} \sum_{n\in\pi} 2^{-n}$. Por otro lado, para cada intervalo etiquetado $(x, [u, v]) \in \mathcal{P}_1$, por la elección del calibre

$$|F(v) - F(u) - F'(x)(v-u)| \leq \tilde{\varepsilon}(v-u)$$

Sumando todos los intervalos etiquetados de $\mathcal{P}_1$, tenemos

$$|F(\mathcal{P}_1) - F'(\mathcal{P}_1)| \leq \tilde{\varepsilon}\mu(\mathcal{P}_1)$$

donde $\mu(\mathcal{P}_1)$ es la medida de $\mathcal{P}_1$, concluimos que

$$|F'(\mathcal{P}) - (F(b) - F(a))| \leq |F(\mathcal{P}_1) - F'(\mathcal{P}_1)| + |F(\mathcal{P}_c)| \leq \tilde{\varepsilon}\mu(\mathcal{P}_1) + \tilde{\varepsilon} \leq (b-a+1)\tilde{\varepsilon}.$$

Por tanto, eligiendo $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a+1}$, se tiene que

$$|F'(\mathcal{P}) - (F(b) - F(a))| \leq \varepsilon$$

y dado que ε es arbitrario, esto muestra que F' es integrable en sentido Henstock-Kurzweil en $[a, b]$, y la integral de F' en cualquier subintervalo $[a, x]$ es igual a $F(x) - F(a)$. ■

Para finalizar este capítulo, el siguiente ejemplo ilustra todo lo visto hasta ahora.

Ejemplo 1.24. *Veamos, usando la definición de integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil, que la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es integrable Henstock-Kurzweil en $[0, 1]$.*

Antes de empezar, podemos probar que es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil usando el teorema previo. Sea $F(x) = 2\sqrt{x}$ derivable en $[0, 1]$ salvo en en $\{0\}$ que es un conjunto finito y por tanto numerable. dado que $f(x) = F'(x)$, estamos en las condiciones del Teorema 1.23, luego $f(x)$ es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil. Llegaremos ahora a la misma conclusión usando la definición de integrabilidad de Henstock-Kurzweil. Probaremos que $\int_0^1 f = 2$, que es el valor de la integral impropia de Riemann. La idea es utilizar el hecho de que la derivada de $2\sqrt{x}$ es $1/\sqrt{x}$ y seguir un procedimiento parecido al que se usó en la demostración del Teorema 1.23.

Sea $\varepsilon > 0$, supongamos que $\varepsilon < 3/4$ y definamos el calibre δ en $[0,1]$ como

$$\delta(x) = \begin{cases} \varepsilon x^2, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \varepsilon^2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Supongamos, en busca de contradicción, que 0 no es etiqueta en $\mathcal{P}$, siendo $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de $[0,1]$ subordinada a δ. Esto significa que, si $(\xi, [a,b]) \in \mathcal{P}$ es el intervalo de la partición que contiene al punto 0 (es decir, $0 \in [a,b]$), entonces necesariamente $\xi \neq 0$. Dado que $0 \in [a,b]$ y la partición cubre el intervalo $[0,1]$, debe ocurrir que $a = 0$. Como la partición está subordinada a δ, se tiene:

$$b - a = b < \delta(\xi) = \varepsilon\, \xi^2.$$

Además, al ser ξ la etiqueta asociada al intervalo $[0,b]$, se cumple que $\xi \in [0,b]$ y, por tanto, $\xi \leq b$. De aquí se deduce:

$$b < \varepsilon\, \xi^2 \leq \varepsilon\, b^2.$$

Dividiendo la desigualdad $b < \varepsilon\, b^2$ por b (recordando que $b > 0$) se obtiene:

$$1 < \varepsilon\, b.$$

Pero como $b \leq 1$ y $\varepsilon < \frac{3}{4}$, se tiene:

$$\varepsilon\, b \leq \varepsilon < \frac{3}{4},$$

lo que contradice la desigualdad $1 < \varepsilon\, b$. Por lo tanto, 0 debe ser etiqueta. Probemos ahora la integrabilidad usando la propia definición. Dado que $c > x - \varepsilon x^2 \geq x - \varepsilon x > x/4$, se tiene que

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{c})^2 > \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x/4})^2 = \frac{9x\sqrt{x}}{4} > x\sqrt{x} \geq x^2$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{c}}{x - c} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| &= \left| \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{c})} \\ &= \frac{x - c}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{c})^2} < \frac{\varepsilon x^2}{x^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

De manera similar, se puede demostrar que

$$\left| \frac{2\sqrt{d} - 2\sqrt{x}}{d - x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| < \varepsilon.$$

Combinando estas dos desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{x}}(d - c) - (2\sqrt{d} - 2\sqrt{c}) \right| &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{x}}(d - x) - (2\sqrt{d} - 2\sqrt{x}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\sqrt{x}}(x - c) - (2\sqrt{x} - 2\sqrt{c}) \right| \\ &= \left| \frac{2\sqrt{d} - 2\sqrt{x}}{d - x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| (d - x) \\ &\quad + \left| \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{c}}{x - c} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| (x - c) \\ &< \varepsilon(d - x) + \varepsilon(x - c) = \varepsilon(d - c). \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{P} = (0, [c_0, d_0]) \cup \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq q\}$ *y calculemos*

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - 2| &= \left| \sum_{i=1}^{q} f(x_i)(d_i - c_i) - \sum_{i=0}^{q} (2\sqrt{d_i} - 2\sqrt{c_i}) \right| \\ &\leq 2\sqrt{d_0} + \sum_{i=1}^{q} \left| \frac{1}{\sqrt{x_i}}(d_i - c_i) - (2\sqrt{d_i} - 2\sqrt{c_i}) \right| \\ &< 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{q} \varepsilon(d_i - c_i) < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto concluye el ejemplo.

Observación. *La función* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *no es integrable en el sentido de Riemann en* $[0, 1]$ *debido a la singularidad en* $x = 0$. *Sin embargo, su integral impropia existe y converge a 2:*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

En el contexto de la integral de Henstock-Kurzweil, esta integral impropia se interpreta como una integral generalizada en la que no es necesario excluir un entorno del punto singular $x = 0$.

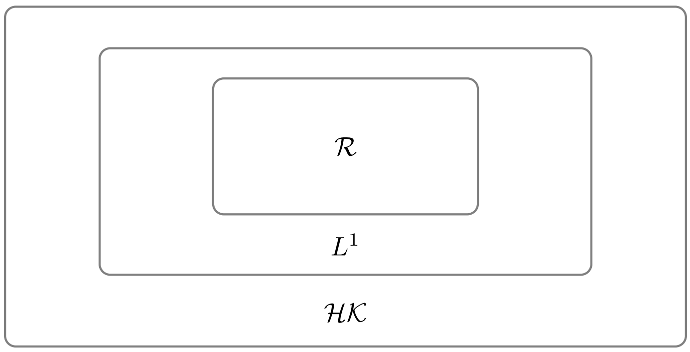
El ejemplo anterior muestra una función que no es integrable en el sentido de Riemann en un intervalo cerrado, pero cuya integral impropia converge. En el marco de la teoría de Riemann, tales situaciones se tratan como límites de integrales en intervalos más pequeños, excluyendo los puntos problemáticos. Sin embargo, la integral de Henstock–Kurzweil proporciona un enfoque más natural y robusto: si una función es integrable en el sentido de Henstock en cada subintervalo interior, y la integral impropia definida como límite desde los extremos converge, entonces la función es integrable en todo el intervalo cerrado, sin necesidad de reinterpretaciones o extensiones formales. Esta característica es una de las diferencias conceptuales más profundas respecto a la teoría de Riemann. En el Capítulo 2 veremos un teorema que enuncia esto, pero para ello necesitaremos un importante lema que veremos en el próximo capítulo, el *Lema de Saks-Henstock*.

Capítulo 2

Integral de Henstock e integral de Lebesgue

En este capítulo analizaremos las conexiones entre la integral de Henstock–Kurzweil y las integrales de Riemann y de Lebesgue, dos de los conceptos más fundamentales del análisis moderno. Estas relaciones ponen de manifiesto no solo la versatilidad de la integral de Henstock–Kurzweil, sino también su capacidad para integrar funciones que quedan fuera del alcance de las teorías de Riemann y de Lebesgue.

Como se explicó en el capítulo inicial, la integral de Henstock–Kurzweil puede considerarse una extensión estricta de la integral de Riemann. Si se restringe el calibre a funciones constantes, la integrabilidad en el sentido de Riemann implica la integrabilidad en el sentido de Henstock–Kurzweil. Sin embargo, el recíproco no es cierto: existen funciones, como la función de Dirichlet, que no son Riemann-integrables pero sí lo son en el sentido de Henstock–Kurzweil.



Nos proponemos ahora estudiar con mayor profundidad la relación entre la integral de Henstock–Kurzweil y la integral de Lebesgue. El objetivo principal de este capítulo será establecer rigurosamente la siguiente cadena de inclusiones estrictas entre los correspondientes espacios de funciones integrables en un intervalo $[a, b]$. Si denotamos como $\mathcal{R}$ el espacio de funciones integrables Riemann, L^1 el espacio de funciones integrables Lebesgue y $\mathcal{HK}$ el espacio de funciones integrables Henstock-Kurzweil, el objetivo será probar la siguiente cadena de inclusiones estrictas

$$\mathcal{R} \subsetneq L^1 \subsetneq \mathcal{HK}.$$

Estas inclusiones destacan que toda función integrable Riemann es también integrable Lebesgue, y toda función integrable Lebesgue es integrable Henstock–Kurzweil, pero no a la inversa.

1. Lema de Saks-Henstock

Comenzamos esta sección con un lema simple pero poderoso que se utiliza con frecuencia en la teoría de la integral de Henstock–Kurzweil. Casi todos los resultados principales que involucran la integral de Henstock emplean este lema en algún punto de su demostración. Este lema fue descubierto por primera vez por Henstock en su descripción inicial de esta integral, aunque él atribuye la idea detrás del lema a Saks. Por ello, llamaremos a este resultado el *Lema de Saks-Henstock*.

El lema establece que las sumas de Riemann no solo aproximan la integral sobre todo el intervalo, sino también sobre uniones de subintervalos. La demostración es, en realidad, bastante elemental. Recordemos que una integral indefinida se considera como una función de intervalos cuando se aplica a particiones etiquetadas. En particular,

$$F(\mathcal{P}) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

si $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$, donde F denota una función primitiva de f, es decir, una función que satisface $F'(x) = f(x)$ en casi todo punto de $[a, b]$.

Lema 2.1 (Lema de Saks-Henstock)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable Henstock en $[a, b]$. Definimos $F(x) = \int_a^x f$ para todo $x \in [a, b]$, y sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que δ es un calibre definido en $[a, b]$ tal que $|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - F(\mathcal{P})| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ. Si $\mathcal{P}_0 = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \le i \le n\}$ es subpartición etiquetada subordinada a δ, entonces se cumple que:*

a) $|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_0) - F(\mathcal{P}_0)| \le \varepsilon$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(d_i - c_i) - (F(d_i) - F(c_i))| \le 2\varepsilon.$

Demostración.

a) Sea $\{K_j : 1 \le j \le m\}$ la colección de intervalos cerrados en $[a, b]$ que son contiguos a los intervalos de $\mathcal{P}_0$. Sea $\eta > 0$ y, para cada j, consideremos una partición etiquetada $\mathcal{P}_j$ de K_j subordinada a δ que satisface $|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_j) - F(K_j)| < \eta/m$. Definimos $\mathcal{P} = \bigcup_{j=0}^{m} \mathcal{P}_j$. Entonces, $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ y se cumple que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_0) - F(\mathcal{P}_0)| &= \Bigg| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_0) + \sum_{j=1}^{m} \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_j) - F(\mathcal{P}_0) - \sum_{j=1}^{m} F(K_j) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} (F(K_j) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_j)) \Bigg| \\
&\le |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - F(\mathcal{P})| + \sum_{j=1}^{m} |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_j) - F(K_j)| \\
&< \varepsilon + \eta.
\end{aligned}$$

Dado que $\eta > 0$ es arbitrario, haciendo $\eta \to 0^+$, se verifica la primera desigualdad.

b) Sea $\mathcal{P}_0 = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ una subpartición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ. Para cada subintervalo, definimos el error del intervalo $[c_i, d_i]$ como

$$E_i := f(x_i)(d_i - c_i) - (F(d_i) - F(c_i)) .$$

Dado que los errores pueden ser positivos o negativos, dividimos el conjunto de índices en

$$I^+ := \{i \in \{1, \ldots, n\} : E_i \geq 0\},$$
$$I^- := \{i \in \{1, \ldots, n\} : E_i < 0\}.$$

Entonces, la suma total de los errores absolutos se descompone como

$$\sum_{i=1}^{n} |E_i| = \sum_{i \in I^+} E_i - \sum_{i \in I^-} E_i.$$

Por el apartado a), sabemos que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} E_i \right| \leq \varepsilon.$$

Esto implica que tanto la parte positiva como la negativa de la suma total están acotadas por ε

$$\sum_{i \in I^+} E_i \leq \varepsilon \qquad \text{y} \qquad -\sum_{i \in I^-} E_i \leq \varepsilon.$$

Por tanto

$$\sum_{i=1}^{n} |E_i| = \sum_{i \in I^+} E_i - \sum_{i \in I^-} E_i \leq 2\varepsilon.$$

Esto concluye la demostración. ■

Este lema pone de manifiesto una propiedad clave de la integral de Henstock–Kurzweil: su estabilidad frente a subparticiones etiquetadas. La primera parte garantiza que, si una partición etiquetada proporciona una buena aproximación de la integral, entonces cualquier subpartición también lo hace con el mismo nivel de precisión. La segunda parte refuerza esta idea mostrando que la suma de los errores locales también está controlada. Este resultado es esencial para el análisis posterior de la integral de Henstock, pues permite trabajar con subparticiones etiquetadas.

2. Propiedades de la primitiva de la integral de Henstock

A continuación presentamos algunas propiedades que tiene la primitiva de la integral de Henstock-Kurzweil. Para ello, es necesario introducir conceptos fundamentales como la *derivada superior e inferior* de una función, así como herramientas esenciales en teoría de la medida, como los *recubrimientos de Vitali* y el *Lema del Recubrimiento de Vitali.*

2.1. Algunos preliminares de Teoría de la Medida

Definición 2.2 (Recubrimiento de Vitali). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Una colección $\mathcal{I}$ de intervalos es un recubrimiento de Vitali de E si, para cada $x \in E$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un intervalo $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ y $\mu(I) < \varepsilon$.*

Definición 2.3 (Medida exterior). *Sea X un conjunto. Una medida exterior sobre X es una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tal que*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. *Si $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
3. *(Subaditividad numerable)*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

para cualquier colección numerable $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X.

Lema 2.4 (Lema del Recubrimiento de Vitali). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ con $\mu^*(E) < \infty$. Si $\mathcal{I}$ es un recubrimiento de Vitali de E, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una familia finita $\{I_k : 1 \leq k \leq n\}$ de intervalos disjuntos en $\mathcal{I}$ tal que*

$$\mu^*\left(E - \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) < \varepsilon.$$

Además, existe una familia de intervalos disjuntos en $\mathcal{I}$ tal que

$$\mu^*\left(E - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = 0.$$

La demostración del *Lema del Recubrimiento de Vitali* se puede encontrar en el *Lema 4.6* de [7].

Definición 2.5 (Derivadas superiores e inferiores, por derecha e izquierda). *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Las derivadas superior derecha e inferior derecha de F en $x \in [a, b)$ se definen como:*

$$D^+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup\left\{\frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta\right\},$$
$$D_+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf\left\{\frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta\right\}.$$

De manera similar, las derivadas superior izquierda e inferior izquierda de F en $x \in (a, b]$ se definen como:

$$D^-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup\left\{\frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x\right\},$$
$$D_-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf\left\{\frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x\right\}.$$

Por supuesto, las derivadas de una función pueden ser infinitas. La función F es diferenciable en $x \in (a, b)$ si las cuatro derivadas son finitas e iguales. La función F es *diferenciable en a o b si las dos derivadas correspondientes son finitas e iguales. Finalmente, las derivadas superior e inferior de F en $x \in [a, b]$ se definen como:*

$$\bar{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\} = \max \left\{ D^+F(x), D^-F(x) \right\},$$

$$\underline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\} = \min \left\{ D_+F(x), D_-F(x) \right\}.$$

Para continuar, serán necesarios algunos resultados de Teoría de la Medida. Para empezar, las demostraciones de los siguientes dos resultados pueden ser encontradas, respectivamente, en el *Teorema 1.12* y *Lema 2.18* de [5].

Teorema 2.6. *Para cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) El conjunto E es medible en el sentido de Lebesgue.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto $O \supseteq E$ tal que $\mu^*(O \setminus E) < \varepsilon$.

(c) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto cerrado $K \subseteq E$ tal que $\mu^*(E \setminus K) < \varepsilon$.

(d) Existe un conjunto G, que es una intersección numerable de conjuntos abiertos tal que $E \subseteq G$ y $\mu^*(G \setminus E) = 0$.

(e) Existe un conjunto F, que es una unión numerable de conjuntos cerrados tal que $F \subseteq E$ y $\mu^*(E \setminus F) = 0$.

Lema 2.7. *Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es medible, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto cerrado $K \subseteq (a, b)$ tal que la restricción $f|_K$ es continua en K y $\mu((a, b) - K) < \varepsilon$.*

Lema 2.8. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es medible, entonces*

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cup Z,$$

donde f está acotada en cada uno de los conjuntos cerrados E_i y $\mu(Z) = 0$.

Demostración. Para cada número entero positivo n, definimos

$$H_n = \{x \in E : n - 1 \leq |f(x)| < n\}.$$

Por el apartado (e) del Teorema 2.6, para cada n existen un conjunto F_n y un conjunto $Z_n = H_n - F_n$ de medida nula tales que

$$H_n = F_n \cup Z_n.$$

Sea $\{E_i^n\}$ una secuencia de conjuntos cerrados tal que $F_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^n$, y definimos

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n.$$

Entonces, el intervalo $[a, b]$ lo podemos escribir como

$$[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^n \cup Z,$$

De lo anterior se tiene que la función f está acotada en cada uno de los conjuntos cerrados E_i^n, dado que f está acotada en H_n y $E_i^n \subset F_n \subset H_n$. Por otro lado, $\mu(Z) = 0$ dado que Z es unión numerable de conjuntos de medida cero. ■

Lema 2.9. *Si E es cualquier conjunto de números reales, entonces el conjunto de puntos que no son puntos de acumulación (simultáneamente por derecha e izquierda) de E es numerable.*

Demostración. Sea E^+ el conjunto de puntos de E que están aislados por la derecha y sea E^- el conjunto de puntos de E que están aislados por la izquierda. Demostraremos que E^+ es numerable; la demostración de que E^- es numerable es similar. Para cada número entero positivo n, definimos

$$E_n^+ = \left\{ x \in E^+ : \left(x, x + \frac{1}{n} \right] \cap E = \emptyset \right\}.$$

Observemos que $E^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+$. Ahora fijemos un n. Para cada entero k, el conjunto E_n^+ contiene como máximo un punto del intervalo $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Para esta afirmación, veamoslo por reducción al absurdo. Supongamos que existieran dos puntos distintos $x, y \in E_n^+$ en el mismo intervalo $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Supongamos, sin pérdida de generalidad $x < y$, entonces por definición de E_n^+:

$$\left(x, x + \frac{1}{n} \right] \cap E = \emptyset \quad \text{y} \quad \left(y, y + \frac{1}{n} \right] \cap E = \emptyset.$$

Pero como $y \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, se tiene $y \leq \frac{k+1}{n}$. Por otro lado, $x \geq \frac{k}{n}$, la distancia entre x e y satisface

$$y - x < \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}.$$

Esto implica que $y \in \left(x, x + \frac{1}{n}\ \right]$. Sin embargo, $y \in E$, lo que contradice que $\left(x, x + \frac{1}{n}\right] \cap E = \emptyset$. Por lo tanto, E_n^+ contiene a lo sumo un punto en cada intervalo $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Como los intervalos $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ son numerables (indexados por $k \in \mathbb{Z}$), cada E_n^+ es numerable. Entonces, $E^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+$ es una unión numerable de conjuntos numerables, y por tanto E^+ es numerable.

De forma análoga se puede ver que E^- es numerable, por tanto $E = E^+ \cup E^-$ es numerable. ■

2.2. Teorema de Lusin

El *Teorema de Lusin* será clave para la prueba del teorema que establece que el valor de la integral de Henstock-Kurzweil es el mismo que el de la inetgral de Lebesgue bajo ciertas condiciones. Antes de presentarlo, será necesario el *Teorema de Extensión de Tietze.* Este establece que si f es una función continua definida en un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{R}$, entonces existe una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que extiende f, es decir, tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in E$. En otras palabras, cualquier función continua definida en un conjunto cerrado puede prolongarse a una función continua en toda la recta real.

Teorema 2.10 (Teorema de Extensión de Tietze)**.** *Sea E un conjunto cerrado. Si una función $f : E \to \mathbb{R}$ es continua en E, entonces existe una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ en E.*

Demostración. Podemos suponer que E es no acotado en ambas direcciones, positiva y negativa. De lo contrario, basta definir $g(x) = f(\sup E)$ para todo $x > \sup E$ y $g(x) =$

$f(\text{ínf } E)$ para todo $x < \text{ínf } E$. Como E es cerrado, su complemento en $\mathbb{R}$ es una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos:

$$\mathbb{R} - E = \bigcup_n (a_n, b_n)$$

donde cada (a_n, b_n) es un intervalo abierto maximal en $\mathbb{R} - E$ (es decir, los extremos a_n y b_n pertenecen a E).

Para definir la extensión $g(x)$, para los puntos de E, simplemente definimos $g(x) = f(x)$ y para los puntos de $\mathbb{R} - E$, definimos la ecuación de la recta que pasa por $(a_n, f(a_n))$ y $(b_n, f(b_n))$,

$$g(x) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n) + f(a_n)$$

Es decir, la función g es lineal en los intervalos que conforman el complemento de E. La continuidad de g en $\mathbb{R}$ es consecuencia directa de la construcción de g. ■

Teorema 2.11 (Teorema de Lusin)**.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen un conjunto cerrado E y una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\mu(\mathbb{R} - E) < \varepsilon$ y $f = g$ en E.*

Demostración. Sea $\{I_n\}$ la sucesión de todos los intervalos abiertos de la forma $(p, p+1)$ donde p es un entero, y sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 2.7, para cada n existe un conjunto cerrado $K_n \subseteq I_n$ tal que $f|_{K_n}$ es continua en K_n y $\mu(I_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Definimos

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

El conjunto E es cerrado y se cumple que

$$\mu(\mathbb{R} - E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n - K_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

y además, la función $f|_E$ es continua en E. Por el *Teorema de Extensión de Tietze*, existe una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ en E. Esto concluye la demostración. ■

3. Relación de la integral de Henstock con la integral de Lebesgue

El primer resultado que veremos establece que la primitiva de una función integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil es continua, derivable en casi todo punto y medible. Este teorema pone de manifiesto la regularidad de las funciones integrables en sentido Henstock-Kurzweil, subrayando que, a pesar de que este tipo de integral permite integrar funciones altamente discontinuas, la función primitiva asociada presenta una estructura notablemente regular.

Teorema 2.12. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en el sentido de Henstock en $[a, b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f$ para cada $x \in [a, b]$. Entonces:*

(a) La función F es continua en $[a, b]$.

(b) La función F es derivable en casi todo punto de $[a,b]$ y $F' = f$ en casi todo punto de $[a,b]$.

(c) La función f es medible.

Demostración.

(a) Sea $c \in [a,b)$, veamos que F es continua por la derecha en c. Dado $\varepsilon > 0$, sea δ el calibre dado por la definición de integrabilidad de Henstock-Kurzweil. Definimos

$$\delta'(t) := \begin{cases} \text{mín}\left\{\delta(t), \frac{1}{2}|t-c|\right\}, & \text{si } t \neq c, \\ \text{mín}\left\{\delta(c), \frac{\varepsilon}{|f(c)|+1}\right\}, & \text{si } t = c. \end{cases}$$

Observemos que esta definición de δ' obliga a que c sea etiqueta de cualquier partición subordinada a δ'. Sea $(\gamma, [\alpha, \beta])$ el intervalo etiquetado tal que $c \in [\alpha, \beta]$. Por la definición de δ' tenemos que si $\gamma > c$ entonces

$$\delta'(\gamma) = \text{mín}\left\{\delta(\gamma), \frac{1}{2}|\gamma - c|\right\} \leq \gamma - c$$

de manera que

$$[\alpha, \beta] \subset (\gamma - (\gamma - c), \gamma + (\gamma - c)) = (c, 2\gamma - c)$$

lo cual es una contradicción ya que $c \in [\alpha, \beta]$. Análogamente, si $\gamma < c$ tenemos también una contradicción. Por tanto, necesariamente, $\gamma = c$.

Ahora, si $0 < h < \delta'(c)$, entonces la subpartición etiquetada $\mathcal{P}_0 = \{(c, [c, c+h])\}$ satisface que $\mathcal{P}_0$ es subordinada a δ'. Por el *Lema de Saks-Henstock*, se cumple que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_0) - F(\mathcal{P}_0)| = \left| f(c) \cdot h - \int_c^{c+h} f \right| \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, podemos acotar

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_c^{c+h} f \right| \leq \varepsilon + |f(c)|h.$$

Además, dado que $0 < h < \delta'(c)$, por la definición de $\delta'(c)$,

$$h < \frac{\varepsilon}{|f(c)+1|} \Rightarrow h|f(c)| < \frac{\varepsilon |f(c)|}{|f(c)+1|} \Rightarrow |f(c)|h < \varepsilon.$$

Entonces,

$$|F(c+h) - F(c)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Esto prueba que F es continua por la derecha en c.

De manera análoga, se puede demostrar la continuidad por la izquierda en los puntos $c \in (a,b]$.

(b) Queremos demostrar que $F'(x) = f(x)$ en casi todo punto de $[a, b]$, es decir, que el conjunto de puntos donde esta igualdad no se cumple tiene medida cero.

Primero, recordemos la definición de derivada superior derecha:

$$D^+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\} = \lim_{\delta \to 0^+} H_\delta(x).$$

Observemos que, $D^+F(x) \neq f(x)$ si y solo si $\lim_{h \to 0^+} H_h(x) \neq f(x)$ si y solo si, aplicando la negación de la definición de límite,

$$\text{existe } \eta_x > 0 \text{ tal que para todo } \delta > 0, \text{ existe } h \in (0, \delta) \text{ con } |H_h(x) - f(x)| \geq \eta_x.$$

De esto último se sigue que existe un $v_h^x \in (x, x + h) \cap [a, b]$ tal que

$$\left| \frac{F(v_h^x) - F(x)}{v_h^x - x} - f(x) \right| \geq \eta_x \iff |F(v_h^x) - F(x) - f(x)(v_h^x - x)| \geq \eta_x(v_h^x - x) \quad (2.1)$$

Teniendo esto en cuenta, consideremos $A = \{x \in [a, b] : D^+F(x) \neq f(x)\}$. Definimos para $n \geq 1$, los subconjuntos de A,

$$A_n = \{x \in A : \eta_x \geq 1/n\},$$

Es suficiente demostrar que la medida exterior $\mu^*(A_n) = 0$ para todo $n \geq 1$. Dado que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se tiene que

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = 0.$$

Por lo tanto, $\mu^*(A) = 0$, lo que implica que A es medible y $\mu(A) = 0$.

Fijemos pues un n. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de integrabilidad de Henstock-Kurzweil existe un calibre δ en $[a, b]$ tal que

$$\left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_a^b f \right| = |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - F(\mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon}$$

para toda $\mathcal{P}$ partición etiquetada y $\tilde{\varepsilon}$ por elegir.

La colección

$$\mathcal{I} = \{[x, v_h^x] : x \in A_n, 0 < h < \delta(x)\},$$

es un recubrimiento de Vitali de A_n, ya que:

a) Para cada $x \in A_n$, existe un intervalo $[x, v_h^x]$ que lo contiene.

b) Los intervalos pueden hacerse arbitrariamente pequeños al tomar $h \to 0$.

Por el *Lema de Vitali*, existe una colección finita de intervalos disjuntos $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq q\}$ tal que

$$\mu^*(A_n) < \sum_{i=1}^{q} (d_i - c_i) + \tilde{\varepsilon}/2,$$

Cada $(c_i, [c_i, d_i])$ es subordinado a δ, pues $[c_i, d_i] \in \mathcal{I}$, por lo cual son de la forma $[x, v_h^x]$ tal que $0 < h < \delta(x)$, y v_h^x se eligió tal que $v_h^x \in (x, x+h)$. Por tanto

$$[x, v_h^x] \subset (x-h, x+h) \subset (x-\delta(x), x+\delta(x)),$$

justificando así que $(c_i, [c_i, d_i])$ es subordinado a δ. Para cada intervalo $[c_i, d_i]$, se tiene por (2.1) que

$$\eta_{c_i}(d_i - c_i) \leq |F(d_i) - F(c_i) - f(c_i)(d_i - c_i)|\,.$$

Por el *Lema de Saks-Henstock*, dado que $\eta_{c_i} \geq 1/n$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q}(d_i - c_i) &\leq \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\eta_{c_i}} |F(d_i) - F(c_i) - f(c_i)(d_i - c_i)| \\ &\leq n \sum_{i=1}^{q} |f(c_i)(d_i - c_i) - (F(d_i) - F(c_i))| \leq n \cdot 2\tilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Tomando que $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2n}$ y que $\sum_{i=1}^{q}(d_i - c_i) \leq \varepsilon/2$.

Consecuentemente se tiene que

$$\mu^*(A_n) < \sum_{i=1}^{q}(d_i - c_i) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\mu^*(A_n) = 0$.

El conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es una unión numerable de conjuntos de medida cero, lo que implica que $\mu^*(A) = 0$.

De forma análoga, podemos probar que $D^- F(x) = f(x)$ casi en todo punto, lo que implica que $F'(x) = f(x)$ casi en todo punto de $[a, b]$.

(c) La medibilidad de f se deduce de (a), ya que una función continua es medible. ■

Mostramos ahora condiciones bajo las cuales una función integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil también es integrable en el sentido de Lebesgue.

Teorema 2.13. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$. Entonces:*

(a) Si f es acotada en $[a, b]$, entonces f es integrable Lebesgue en $[a, b]$.

(b) Si f es no negativa en $[a, b]$, entonces f es integrable Lebesgue en $[a, b]$.

(c) Si f es integrable Henstock-Kurzweil en cada subconjunto medible de $[a, b]$, entonces f es integrable Lebesgue en $[a, b]$.

Demostración.

(a) Si f es acotada en $[a, b]$ e integrable Henstock, entonces f es medible por el apartado (c) del Teorema 2.12. Como f es medible y acotada, f es integrable Lebesgue en $[a, b]$.

(b) Sea $F(x) = \int_a^x f$ la función primitiva de f, definida mediante la integral de Henstock. Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, se tiene que para cualquier $x_1, x_2 \in [a,b]$ tal que $x_1 \leq x_2$, la integral

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \geq 0.$$

Por lo tanto, F es una función monótona no decreciente. Sabemos también que F es continua en $[a,b]$ y derivable en casi todo punto. Como $F' = f$, entonces $F' \geq 0$ en casi todo punto.

Definimos $F' = 0$ en todo punto en que no está definida. Consideramos la función $\tilde{F} : [a, b+1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{si } x \in [a,b], \\ F(b), & \text{si } x \in [b, b+1]. \end{cases}$$

Definimos la sucesión de funciones

$$g_k(x) = \frac{\tilde{F}(x + 1/k) - \tilde{F}(x)}{1/k}.$$

Es claro que $\{g_k\} \to F'$ en casi todo punto $x \in [a,b]$ si $k \to \infty$ y, dado que F es no decreciente, se cumple que $g_k(x) \geq 0$ y además, g_k es medible no negativo para todo k.

Entonces, aplicando el *Lema de Fatou*,

$$\int_a^b |F'(x)|\ dx = \int_a^b F'(x)\ dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} g_k(x)\ dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x)\ dx.$$

Observamos que

$$\int_a^b g_k(x)\ dx = k \int_a^b \tilde{F}(x + \tfrac{1}{k})\ dx - k \int_a^b \tilde{F}(x)\ dx.$$

Haciendo el cambio $x + \frac{1}{k} = y$, obtenemos

$$k \int_{a+\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} \tilde{F}(x)\, dx - k \int_a^b \tilde{F}(x)\, dx = k \int_b^{b+\frac{1}{k}} \tilde{F}(x)\, dx - k \int_a^{a+\frac{1}{k}} \tilde{F}(x)\, dx =$$

$$= F(b) - \frac{1}{1/k} \int_a^{a+\frac{1}{k}} \tilde{F}(x)\, dx.$$

Claramente F es continua en a. Sea ahora $G(x) = \int_a^x F(x)\ dx$, por el T*eorema Fundamental de Calculo* para F continua por la derecha, se tiene que $G'_+(a) = F(a)$, luego

$$\frac{1}{1/k} \int_a^{a+\frac{1}{k}} F(x)\, dx = \frac{G(a + \frac{1}{k}) - G(a)}{1/k} \xrightarrow[k\to\infty]{} G'(a),$$

Por tanto, recuperando lo anterior, se tiene

$$F(b) - \frac{1}{1/k} \int_a^{a+\frac{1}{k}} \tilde{F}(x)\, dx \xrightarrow[k\to\infty]{} F(b) - F(a).$$

Luego,

$$\int_a^b |F'(x)|\, dx \leq F(b) - F(a),$$

y así F' es integrable Lebesgue, y por tanto, f es integrable Lebesgue.

(c) Dividamos f en sus partes positivas y negativas:

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}.$$

Dado que f es integrable Henstock-Kurzweil en cada subconjunto medible de $[a, b]$, se sigue que f^+ y f^- son integrables Henstock-Kurzweil en $[a, b]$.

Por las partes (a) y (b), tanto f^+ como f^- son integrables Lebesgue. Como $f = f^+ - f^-$, concluimos que f es integrable en el sentido de Lebesgue en $[a, b]$. ■

3.1. Funciones acotadas y la equivalencia de integrales

En la sección anterior se introdujeron los primeros resultados que relacionaban la integral de Lebesgue con la de Henstock-Kurzweil. El siguiente lema nos asegura que si una función es acotada y medible, dicha función es integrable Henstock-Kurzweil y es integrable en el sentido de Lebesgue, además de que su valor de integral coincide.

Lema 2.14. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y medible. Entonces, f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y se cumple que*

$$(H)\int_a^b f = (L)\int_a^b f.$$

Demostración. Sea M una cota para f y sea $\varepsilon > 0$. Por el *Teorema de Lusin*, existe una función continua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y un conjunto cerrado $E \subseteq [a, b]$ tal que, para $\tilde{\varepsilon} > 0$ por elegir,

$$\mu([a, b] - E) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{M}, \quad f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in E, \quad \text{y } M \text{ es una cota para } g.$$

Como $f(x) = g(x)$ en el conjunto cerrado E, se tiene que $|f(x)-g(x)| = 0$ en E. Además, dado que f y g están acotadas por M, se cumple que $|f(x) - g(x)| \leq 2M$ en todo $[a, b]$. Por tanto, dado que f y g solo difieren en el conjunto $[a, b] \setminus E$, se obtiene

$$(L)\int_a^b |f(x)-g(x)|\, dx = (L)\int_{[a,b]\setminus E} |f(x)-g(x)|\, dx \leq (L)\int_{[a,b]\setminus E} 2M\, dx = 2M\cdot\mu([a, b]\setminus E).$$

Dado que g es continua y acotada en $[a, b]$, es integrable en el sentido de Riemann. Por tanto, también es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil. Aplicando el apartado (a) del Teorema 2.13, se tiene que g es integrable en el sentido de Lebesgue, luego existe un calibre δ_1 en $[a, b]$ tal que

$$\left|\mathcal{S}(g, \mathcal{P}) - (L)\int_a^b g\right| < \tilde{\varepsilon}$$

siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ_1. Definimos el calibre δ en $[a, b]$ como

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{mín}\left\{\delta_1(x), \rho(x, E)\right\}, & \text{si } x \in [a, b] - E \\ \delta_1(x), & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Si $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ y $\mathcal{P}_1$ el subconjunto de $\mathcal{P}$ con etiquetas en $[a,b]-E$, por definición de δ, tenemos que

$$\mu(\mathcal{P}_1) \leq \mu([a,b]-E) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{M}.$$

Teniendo esto en cuenta, si $\mathcal{P}$ es una partición subordinada a δ,

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - (L)\int_a^b f\right| &\leq |\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{S}(g,\mathcal{P})| + \left|\mathcal{S}(g,\mathcal{P}) - (L)\int_a^b g\right| + \left|(L)\int_a^b g - (L)\int_a^b f\right| \\ &\leq 2M\mu(\mathcal{P}_1) + \tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon} \\ &< 5\tilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Eligiendo $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{5}\varepsilon$ tenemos que

$$|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - (L)\int_a^b f| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la función f es integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$ y se verifica que

$$(H)\int_a^b f = (L)\int_a^b f.$$

■

4. Integrales impropias e integral de Henstock

En el final del capítulo anterior vimos, mediante un ejemplo concreto, que funciones como $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$ en $[0,1]$, aunque presentan una singularidad en un extremo del intervalo, pueden ser integrables Henstock. Esto nos sugiere que la integral de Henstock-Kurzweil permite tratar funciones no necesariamente acotadas en los extremos de su dominio.

En esta sección formalizamos este fenómeno: presentamos un resultado que garantiza la integrabilidad en todo el intervalo cerrado $[a,b]$ a partir de la integrabilidad local en subintervalos (a,b), siempre que las integrales en extremos converjan adecuadamente. Este teorema proporciona un criterio práctico para extender la integral de Henstock-Kurzweil a situaciones donde aparecen comportamientos singulares en los extremos. Antes de presentarlo, necesitamos un lema.

Lema 2.15. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable Henstock-Kurzweil en cada intervalo $[a,c]$ con $c \in (a,b)$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un calibre $\delta : [a,b) \to (0,\infty)$ con la siguiente propiedad: si $c \in (a,b)$ y $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a,c]$ subordinada a δ, entonces*

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \int_a^c f\right| < \varepsilon.$$

Demostración. La idea de la demostración es dividir el intervalo $[a,b)$ en subintervalos $[a_0,a_1]$, $[a_1,a_2]$, ... que se van acercando a b. En cada subintervalo, como f es integrable Henstock, podemos encontrar un calibre δ_n. Luego bastará combinar todos estos calibres en δ definido en $[a,b)$. Veámoslo.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente de puntos en (a,b) tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Por ejemplo, podríamos tomar $a_n = a+(b-a)(1-1/n)$, de forma que $a_0 = a$. Para cada entero positivo n, elegimos un calibre δ_n definido en $[a_{n-1}, a_n]$ tal que

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \int_{a_{n-1}}^{a_n} f\right| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada de $[a_{n-1}, a_n]$ subordinada a δ_n.

Denotamos $I_n = (a_{n-1}, a_n)$. Definimos entonces el calibre δ en $[a,b)$ de la siguiente forma:

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{mín}\{\delta_1(a), a_1 - a\}, & \text{si } x = a, \\ \text{mín}\{\delta_n(x), \rho(x, \mathcal{C}I_n)\}, & \text{si } x \in I_n, \\ \text{mín}\{\delta_n(a_n), \delta_{n+1}(a_n), \ell(I_n), \ell(I_{n+1})\}, & \text{si } x = a_n. \end{cases}$$

donde $\mathcal{C}I_n$ denota el complemento de I_n, es decir, $\mathcal{C}I_n = [a,b] \setminus I_n$, y $\rho(x, \mathcal{C}I_n)$ es la distancia de x al complemento de I_n, osea, la distancia del punto x al exterior del abierto I_n. Dado que $\rho(x, \mathcal{C}I_n) > 0$ para todo $x \in E_n$, la función calibre δ siempre es positiva y por tanto está bien definida.

Sea ahora $c \in (a,b)$ y supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a,c]$ subordinada a δ. Podemos suponer que todas las etiquetas de $\mathcal{P}$ son extremos de los subintervalos.

Elegimos un entero q tal que $a_q \le c < a_{q+1}$. Nótese que a_n es una etiqueta para cada $n = 0, 1, \ldots, q$, y que cada subintervalo de $\mathcal{P}$ está contenido en algún intervalo de la forma $[a_{n-1}, a_n]$ para cierto $1 \le n \le q+1$.

Para cada $n = 1, 2, \ldots, q$, definimos $\mathcal{P}_n$ como el subconjunto de $\mathcal{P}$ que contiene los subintervalos contenidos en $[a_{n-1}, a_n]$. Definimos además $\mathcal{P}_{q+1}$ como el subconjunto de $\mathcal{P}$ con subintervalos contenidos en $[a_q, c]$.

Cada $\mathcal{P}_n$ para $1 \le n \le q$ es una subpartición etiquetada subordinada a δ_n, y $\mathcal{P}_{q+1}$ lo es respecto de δ_{q+1}. Por el *Lema de Saks-Henstock* se tiene:

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \int_a^c f\right| &\le \sum_{n=1}^{q} \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_n) - \int_{a_{n-1}}^{a_n} f\right| + \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_{q+1}) - \int_{a_q}^{c} f\right| \\ &< \sum_{n=1}^{q} \frac{\varepsilon}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2^{q+1}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.16. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable Henstock-Kurzweil en cada intervalo $[c,d] \subseteq (a,b)$. Si*

$$\int_c^d f$$

converge a un límite finito cuando $c \to a^+$ y $d \to b^-$, entonces f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a,b]$, y se tiene que

$$\int_a^b f = \lim_{\substack{c\to a^+ \\ d\to b^-}} \int_c^d f.$$

Demostración. Demostraremos un caso particular del teorema. Supongamos que f es integrable en el sentido de Henstock en cada intervalo $[a, c]$ con $c \in (a, b)$, y que existe el límite

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f = L \in \mathbb{R}.$$

Veamos que f es integrable en el sentido de Henstock en $[a, b]$ y se cumple que

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f.$$

El caso del extremo izquierdo a es completamente análogo, y el teorema general se deduce combinando ambos casos. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 2.15, existe un calibre δ_1 tal que, para toda partición etiquetada $\mathcal{P}_a$ de $[a, c]$ subordinada a δ_1, se tiene

$$\left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_a) - \int_a^c f \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, como $\int_a^c f \to L$ cuando $c \to b^-$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^c f - L \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } c \in (b - \eta, b).$$

Definimos el calibre $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ como

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), b - x\}, & \text{si } x \in [a, b), \\ \min\left\{\eta, \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |f(b)|)}\right\}, & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Sea ahora $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ. Como b debe aparecer como etiqueta, existe un subintervalo $[c, b] \subset [a, b]$ en la partición tal que $b - \eta < c < b$ y $(b, [c, b]) \in \mathcal{P}$. Definimos la partición etiquetada

$$\mathcal{P}_a := \mathcal{P} \setminus \{(b, [c, b])\}.$$

Entonces, usando la linealidad de las sumas de Henstock, tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - L| &= |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_a) + \mathcal{S}(f, \{(b, [c, b])\}) - L| \\ &= |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_a) + f(b)(b - c) - L| \\ &\leq \left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_a) - \int_a^c f \right| + \left| \int_a^c f - L \right| + |f(b)|(b - c) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

donde, para acotar $|f(b)|(b - c)$, se usó la definición del calibre en el punto b. En efecto, al definir

$$\delta(b) = \min\left\{\eta, \frac{\varepsilon}{3(1 + |f(b)|)}\right\},$$

se garantiza que si $\mathcal{P}$ es subordinada a δ, entonces el subintervalo correspondiente a la etiqueta b cumple $b - c < \delta(b) \leq \frac{\varepsilon}{3(1+|f(b)|)}$. Multiplicando esta desigualdad por $|f(b)|$, se obtiene

$$|f(b)|(b - c) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{|f(b)|}{1 + |f(b)|} < \frac{\varepsilon}{3},$$

pues $\dfrac{|f(b)|}{1+|f(b)|} < 1$. Por tanto, la función f es integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$, y se cumple que

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f.$$

■

Ejemplo 2.17. *En el ejemplo 1.24, vimos que la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \textit{si } x \in (0,1], \\ 0, & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

era integrable Henstock-Kurzweil en $[0,1]$. Veamos que podemos llegar a esto aplicando el teorema anterior. Para cada subintervalo $[c,1] \subset (0,1]$, con $c > 0$, la función es continua y acotado, luego es integrable Riemann, y por tanto integrable en sentido de Henstock-Kurzweil. Además, la integral $\int_c^1 f$ converge a un valor finito cuando $c \to 0^+$. Por tanto, aplicando el teorema anterior, f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en todo el intervalo $[0,1]$.

Capítulo 3

Teoremas de Convergencia

En esta sección, veremos las mejoras que presenta la integral de Henstock-Kurzweil respecto a los teoremas de convergencia. La integral de Lebesgue mejoraba el comportamiento de la integral de Riemann en este aspecto.

Para comenzar, veremos la definición de sucesión de funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil, y a continuación, el Teorema de Convergencia Uniforme. Más tarde veremos qué significa que una sucesión sea $\mathcal{P}$-Cauchy y cómo, gracias a este concepto, se puede llegar al teorema de convergencia de Henstock, que proporciona una generalización del teorema clásico de convergencia dominada en el contexto de la integral de Henstock-Kurzweil [5]. En efecto, dicho teorema establece que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones Henstock-integrables en $[a,b]$, que converge puntualmente a una función f, y si además $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy, entonces f es integrable Henstock-Kurzweil y

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Este resultado no requiere la existencia de una función dominante ni hipótesis de acotación monótona, lo que lo convierte en una herramienta poderosa para tratar límites de sucesiones de funciones que no encajan en los marcos de Lebesgue clásicos.

Para facilitar la lectura y evitar sobrecargar la notación, a lo largo de este capítulo nos referiremos a las sucesiones de funciones simplemente como $\{f_n\}$, en lugar de como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, salvo cuando sea necesario especificar el índice. Esta simplificación no afectará la precisión del contenido y se adoptará siempre que el contexto permita una interpretación clara.

1. Convergencia uniforme, dominada y monótona

Definición 3.1 (Sucesión uniformemente integrable). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil definidas en $[a,b]$. Decimos que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre δ definido en $[a,b]$ tal que*

$$\left| \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - \int_a^b f_n \right| < \varepsilon$$

para todo n, siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ.

Teorema 3.2 (Convergencia Uniforme)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en el sentido de Henstock definidas en $[a,b]$ y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$. Si la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$, entonces f es integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$ y se cumple que*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente Henstock integrable en $[a,b]$, existe una partición etiquetada $\mathcal{P}_0$ de $[a,b]$ tal que

$$\left| \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_0) - \int_a^b f_n \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } n.$$

Dado que $\{f_n\}$ converge puntualmente en $[a,b]$, entonces se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todo } m,n \geq N \text{ y para todo } x \in [a,b].$$

En consecuencia, lo anterior se tiene evaluando en las etiquetas de la partición etiquetada, luego podemos escribir

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_0) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } m,n \geq N.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f_m \right| &\leq \left| \int_a^b f_n - \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_0) \right| + |\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_0) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_0)| + \left| \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_0) - \int_a^b f_m \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $m,n \geq N$. De ello se deduce que $\left\{ \int_a^b f_n \right\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea L el límite de esta sucesión. Veamos que $\int_a^b f = L$. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe un calibre δ en $[a,b]$ tal que

$$\left| \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - \int_a^b f_n \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } n$$

siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ. Escojamos un entero M tal que

$$\left| \int_a^b f_n - L \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } n \geq M.$$

Supongamos que $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 0 \leq i \leq n\}$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ. Como $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, existe un entero $k \geq M$ tal que

$$|f_k(\xi_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

para cada etiqueta ξ_i de la partición. Esto implica que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \mathcal{S}(f_k, \mathcal{P})| = \left| \sum_{i=0}^{n} (f(\xi_i) - f_k(\xi_i)) (t_{i+1} - t_i) \right| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) = \frac{\varepsilon}{3},$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|\mathcal{S}(f,\mathcal{P})-L| &\leq |\mathcal{S}(f,\mathcal{P})-\mathcal{S}(f_k,\mathcal{P})| + \left|\mathcal{S}(f_k,\mathcal{P})-\int_a^b f_k\right| + \left|\int_a^b f_k - L\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Concluimos que f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

■

Recordemos que este teorema también es válido para la integral de Riemann. De hecho, la convergencia uniforme preserva la integrabilidad en los tres marcos: Riemann, Lebesgue y Henstock, lo cual no ocurre con otros teoremas de convergencia.

En efecto, los teoremas de convergencia más potentes, como el de la convergencia monótona o el de la convergencia dominada, no son válidos en el contexto de la integral de Riemann, ya que requieren propiedades que la integral de Riemann no satisface.

Por el contrario, la integral de Henstock-Kurzweil, al extender tanto a la de Riemann como a la de Lebesgue, permite formular y demostrar versiones generalizadas de estos teoremas. Para poder probar estos teoremas, será necesario un resultado clave, el *Teorema de Egorov*, una herramienta esencial en la demostración del *Teorema de la Convergencia Dominada*, tal como aparece en [5]. Para ello, introduciremos antes algunos conceptos fundamentales de teoría de la medida [3].

Teorema 3.3. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E y sea $f : E \to \mathbb{R}$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en casi todo punto de E, entonces f es medible.*

Demostración. Dado que $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in E$, existe un conjunto $N \subseteq E$ tal que $m(N) = 0$ y $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in E' = E \setminus N$. Queremos probar que f es medible, lo cual equivale a probar que para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{x \in E : f(x) < a\}$$

es medible.

Dado que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in E'$, podemos utilizar una caracterización clásica del *límite inferior punto a punto* de una sucesión de funciones reales. Esta caracterización establece que, si definimos

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right),$$

entonces, para cualquier número real a, se cumple la siguiente igualdad de conjuntos

$$\{x \in E' : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{x \in E' : f_n(x) < a + \tfrac{1}{k}\right\}.$$

En nuestro caso, como $f_n(x) \to f(x)$, se tiene que $\liminf f_n(x) = f(x)$, por lo que aplicando esta caracterización obtenemos

$$\{x \in E' : f(x) < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{x \in E' : f_n(x) < a + \tfrac{1}{k}\right\}.$$

Esta expresión nos permite describir el conjunto donde la función límite toma valores estrictamente menores que a como una unión numerable de intersecciones, lo cual resulta útil para argumentos que requieren propiedades de medibilidad o aproximación desde funciones más simples.

Cada conjunto $\{x \in E' : f_n(x) < a + \frac{1}{k}\}$ es medible, ya que f_n es medible por hipótesis. Las operaciones de unión numerable y de intersección numerable preservan la medibilidad, por lo que el conjunto

$$A := \{x \in E' : f(x) < a\}$$

es medible. Dado que $E = E' \cup N$ y N es de medida nula, se sigue que

$$\{x \in E : f(x) < a\} = A \cup (N \cap \{x : f(x) < a\})$$

es unión de conjuntos medibles, ya que N es medible. Por tanto, f es medible. ■

Teorema 3.4. *Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección numerable en $\mathcal{M}$ tal que $E_i \subset E_{i+1}$ para todo i entonces*

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu\left(E_i\right)$$

o lo que es lo mismo,

$$\lim_{i\to\infty} \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i - E_i\right) = 0$$

Demostración. Definimos $A_1 = E_1, A_2 = E_2 \backslash E_1, A_3 = E_3 \backslash E_2$ y, en general, $A_i = E_i \backslash E_{i-1}$ para todo $i \geq 2$. Se verifican entonces las propiedades siguientes:

1. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia numerable disjunta y $A_i \in \mathcal{M}$.
2. $\cup_{i=1}^{n} A_i = E_n$.
3. $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right).
\end{aligned}$$

Teniendo esto, la igualdad

$$\lim_{i\to\infty} \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i - E_i\right) = 0$$

es clara. [3] ■

Teorema 3.5 (Teorema de Egorov)**.** *Sea E un conjunto medible de medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente en casi todo punto de E a una función f, entonces para cada $\eta > 0$ existe un conjunto medible $H \subseteq E$ tal que $\mu(E - H) < \eta$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en H.*

Demostración. La función f es medible por el Teorema 3.3. Sea B el conjunto de todos los puntos $x \in E$ para los cuales $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$. Sea k un número entero positivo. Para cada entero positivo p, definimos

$$B_k^p = \left\{x \in B : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \text{ para todo } n \geq p\right\}.$$

Entonces, cada conjunto B_k^p es un conjunto medible que cumple

$$B_k^p \subseteq B_k^{p+1}, \quad B = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_k^p, \quad \text{y} \quad \lim_{p\to\infty} \mu\left(B - B_k^p\right) = 0.$$

de donde la última igualdad se sigue del Teorema 3.4. Elegimos un entero p_k tal que $\mu\left(B - B_k^{p_k}\right) < \frac{\eta}{2^k}$. Esto produce una sucesión $\{B_k^{p_k}\}$ de subconjuntos de B. Definimos $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^{p_k}$. Como

$$B - H = B - \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^{p_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(B - B_k^{p_k}\right),$$

se obtiene que

$$\mu(E - H) = \mu(B - H) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B - B_k^{p_k}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^k} = \eta.$$

Ya tenemos la primera parte. Demostraremos ahora que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre H. Sea $\varepsilon > 0$ y elijamos un entero positivo j tal que $\frac{1}{j} < \varepsilon$. Supongamos que $n \geq p_j$ y $x \in H$. Entonces, $x \in B_j^{p_j}$, y por lo tanto, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} < \varepsilon$, luego f_n converge uniformemente a f. ■

Observación. *Bajo las hipótesis del Teorema de Egorov, dado cualquier* $\eta > 0$, *existe un conjunto medible* $H \subseteq E$ *tal que* $f_n \to f$ *uniformemente en* H *y* $\mu(E \setminus H) < \eta$. *Por la regularidad exterior de la medida de Lebesgue, existe un conjunto abierto* $O \supseteq E \setminus H$ *tal que* $\mu(O) < \eta$. *Como* $E \setminus H \subseteq O$, *se deduce que* $E \setminus O \subseteq H$, *y por tanto,* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* $E \setminus O$.

Ya con el *Teorema de Egorov* estamos cerca de poder enunciar y dar la prueba del *Teorema de Convergencia Dominada* y el *Teorema de Convergencia Monótona* aplicados a la integral de Henstock-Kurzweil. Para ello es necesario un lema, cuya demostración puede ser encontrada en el *Lema 4.11* de [5].

Lema 3.6. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada y medible. Si definimos* $F(x) = (L)\int_a^x f$ *para cada* $x \in [a, b]$, *entonces* F *es absolutamente continua en* $[a, b]$, *y se cumple que* $F' = f$ *en casi todo punto* $[a, b]$.

Teorema 3.7 (Teorema de Convergencia Dominada)**.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones integrables en el sentido de Henstock definidas en* $[a, b]$, *y supongamos que* $\{f_n\}$ *converge puntualmente a* f *en* $[a, b]$. *Si existen funciones integrables en el sentido de Henstock* g *y* h *en* $[a, b]$ *tales que*

$$g \leq f_n \leq h \quad \text{en } [a, b], \quad \text{para todo } n,$$

entonces $\{f_n\}$ *es uniformemente integrable en el sentido de Henstock en* $[a, b]$. *Como consecuencia, la función* f *es integrable en el sentido de Henstock en* $[a, b]$ *y se cumple que*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración. Por hipótesis, g y h son integrables en el sentido de Henstock en $[a, b]$, por lo que su diferencia $\phi := h - g$ también lo es. Por el apartado (c) del Teorema 2.12, toda función integrable en el sentido de Henstock es medible, luego ϕ medible. Aplicando el apartado (c) del Teorema 2.13, concluimos que ϕ es integrable en el sentido de Lebesgue en $[a, b]$. Esto nos permitirá usar teoremas aplicados a la integral de Lebesgue más adelante. Además, dado que $f_n(x) \in [g(x), h(x)]$ para todo n, se cumple que

$$|f_n - f_m| \leq \phi \quad \text{para todo } m, n.$$

Por el *Teorema de Convergencia Dominada* para la integral de Lebesgue, la función $f - f_1$ es integrable en el sentido de Lebesgue en $[a, b]$ y se cumple que

$$\int_a^b (f - f_1) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n - f_1).$$

En particular, la sucesión $\left\{\int_a^b f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Sea $\tilde{\varepsilon} > 0$ por elegir. Consideremos la función

$$\Phi(x) = \int_a^x \phi$$

que es absolutamente continua en $[a, b]$ por el Lema 3.6, por tanto existe $\eta > 0$ tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{q} \left(\Phi\left(d_i\right) - \Phi\left(c_i\right)\right)\right| < \tilde{\varepsilon}$$

siempre que $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq q\}$ sea una colección finita de intervalos disjuntos etiquetados en $[a, b]$ que satisfaga $\sum_{i=1}^{q} (d_i - c_i) < \eta$.

Por la observación del *Teorema de Egorov*, existe un conjunto abierto $O \subset [a, b]$ con $\mu(O) < \eta$ tal que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $[a, b] \setminus O$. Por otro lado, como $\{f_n\}$ converge a f en $L^1([a, b])$, la sucesión es de Cauchy. Por tanto, existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, se cumple

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f_m\right| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{y} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{para todo } x \in [a, b] \setminus O.$$

Sea el calibre δ_ϕ en $[a, b]$ tal que

$$\left|\mathcal{S}(\phi, \mathcal{P}) - \int_a^b \phi\right| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{y} \quad \left|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - \int_a^b f_n\right| < \tilde{\varepsilon}$$

para $1 \leq n \leq N$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ_ϕ. Definimos un calibre δ en $[a, b]$ como

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_\phi(x), & \text{si } x \in [a, b] - O \\ \text{mín}\left\{\delta_\phi(x), \rho(x, \mathcal{C}O)\right\}, & \text{si } x \in O \end{cases}$$

Supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ y fijemos $n > N$. Sea $\mathcal{P}_1$ el subconjunto de $\mathcal{P}$ que tiene etiquetas en $[a, b] - O$ y definimos $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P} - \mathcal{P}_1$. Partimos de la desigualdad:

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - \mathcal{S}(f_N, \mathcal{P})| \leq \underbrace{|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f_N, \mathcal{P}_1)|}_{\text{I}} + \underbrace{|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_2) - \mathcal{S}(f_N, \mathcal{P}_2)|}_{\text{II}}.$$

Estimamos cada término por separado:

1. Estimación del término I: Como $\mathcal{P}_1$ contiene sólo etiquetas en $[a,b]\setminus O$, y $f_n \to f$ uniformemente fuera de O, se tiene:

$$|f_n(x) - f_N(x)| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{para todo } x \in [a,b]\setminus O.$$

   Entonces:

$$\mathrm{I} = \left| \sum_{(\xi_i,[c_i,d_i])\in\mathcal{P}_1} (f_n(\xi_i) - f_N(\xi_i))(d_i - c_i) \right| < \tilde{\varepsilon}\mu(\mathcal{P}_1) \leq \tilde{\varepsilon}(b-a).$$

2. Estimación del término II: Para $\mathcal{P}_2$, se cumple que $|f_n(x) - f_N(x)| \leq \phi(x)$, luego:

$$\mathrm{II} \leq \left| \sum_{(\xi_i,[c_i,d_i])\in\mathcal{P}_2} \phi(\xi_i)(d_i - c_i) \right| = |\mathcal{S}(\phi, \mathcal{P}_2)|.$$

   Dado que $\Phi(x) := \int_a^x \phi$ es absolutamente continua y $\mu(\mathcal{P}_2) < \eta$, se tiene:

$$\left| \sum_{(\xi_i,[c_i,d_i])\in\mathcal{P}_2} (\Phi(d_i) - \Phi(c_i)) \right| < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow |\Phi(\mathcal{P}_2)| < \tilde{\varepsilon}.$$

   Descomponemos y estimamos teniendo lo anterior

$$\mathrm{II} \leq |\mathcal{S}(\phi,\mathcal{P}_2)| = |\Phi(\mathcal{P}_2) + (\mathcal{S}(\phi,\mathcal{P}_2) - \Phi(\mathcal{P}_2))| \leq \underbrace{|\mathcal{S}(\phi,\mathcal{P}_2) - \Phi(\mathcal{P}_2)|}_{\mathrm{II}_1 < \tilde{\varepsilon}} + \underbrace{|\Phi(\mathcal{P}_2)|}_{\mathrm{II}_2 < \tilde{\varepsilon}} < 2\tilde{\varepsilon}.$$

   donde para acotar II_1 hemos usado el *Lema de Sacks-Henstock*.

Por tanto, tenemos que

$$|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}) - \mathcal{S}(f_N,\mathcal{P})| < \mathrm{I} + \mathrm{II} < \tilde{\varepsilon}(b-a) + 2\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(b-a+2).$$

Finalmente, aplicando todo lo que ya tenemos

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}) - \int_a^b f_n\right| &\leq |\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}) - \mathcal{S}(f_N,\mathcal{P})| + \left|\mathcal{S}(f_N,\mathcal{P}) - \int_a^b f_N\right| + \left|\int_a^b f_N - \int_a^b f_n\right| \\ &< \tilde{\varepsilon}(b-a+2) + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(b-a+4)\end{aligned}$$

y eligiendo $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a+4}$ tenemos que

$$\left|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}) - \int_a^b f_n\right| < \varepsilon.$$

Tomando limite a esto ultimo se tiene que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

■

Del teorema anterior, se permite dar una prueba relativamente sencilla del *Teorema de Convergencia Monótona*.

Teorema 3.8 (Teorema de Convergencia Monótona). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones Henstock integrables definidas en $[a,b]$ y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$. Si $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ es finito, entonces $\{f_n\}$ es uniformemente Henstock integrable en $[a,b]$. En consecuencia, la función f es Henstock integrable en $[a,b]$ y se cumple que $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ es no decreciente. Para cada n, la función $f_n - f_1$ es no negativa e integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$. Se sigue que cada una de estas funciones es integrable en el sentido de Lebesgue en $[a,b]$.

Por el *Teorema de Convergencia Monótona* para la integral de Lebesgue, la función $f - f_1$ es integrable en el sentido de Lebesgue en $[a,b]$. Se concluye que $f = (f - f_1) + f_1$ es integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$. Dado que $f_1 \leq f_n \leq f$ en $[a,b]$ para todo n, la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable Henstock en $[a,b]$ por el *Teorema de Convergencia Dominada*, y además $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$. ■

2. Sucesión $\mathcal{P}$-Cauchy.

La noción de una *sucesión $\mathcal{P}$-Cauchy* permite establecer un tipo de convergencia localizada que permite trabajar con sucesiones de funciones que no necesariamente son uniformemente convergentes, pero cuya convergencia es suficiente para garantizar la integrabilidad de la función límite. Este concepto se utiliza en el desarrollo de resultados de convergencia bajo condiciones más débiles que las que se requieren para la convergencia uniforme o la convergencia dominada. En particular, las sucesiones $\mathcal{P}$-Cauchy generalizadas permiten abordar casos en los que el conjunto de convergencia no es global, sino que puede descomponerse en subintervalos sobre los cuales las sucesiones cumplen con la propiedad de Cauchy.

Definición 3.9. *(Sucesión $\mathcal{P}$-Cauchy) Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles definidas en $[a,b]$ y sea $E \subseteq [a,b]$ un conjunto medible. Se dice que la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy en E si converge puntualmente en E y si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre δ definido en E y un entero positivo N tales que*

$$|F_n(\mathcal{P}) - F_m(\mathcal{P})| < \varepsilon$$

para todos $m, n \geq N$, siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada E-subordinada a δ.

Asimismo, se dice que la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy generalizada en E si el conjunto E puede expresarse como una unión numerable de conjuntos medibles, en cada uno de los cuales $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy.

Lema 3.10. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $E \subseteq [a,b]$. Si $\mu(E) = 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibre δ sobre E tal que $\mathcal{S}(|f|, \mathcal{P}) < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea partición etiquetada E-subordinada a δ.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos

$$A_E = \{x \in E : |f(x)| \neq 0\}.$$

Entonces, si definimos

$$A_E^n = \{x \in E : n - 1 < |f(x)| \leq n\},$$

los conjuntos A_E^n son disjuntos dos a dos y verifican

$$A_E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_E^n, \quad \text{donde} \quad \mu(A_E^n) \leq \mu(A_E) \leq \mu(E) = 0.$$

De manera que los A_E^n y A_E son medibles por la completitud de la medida, y tienen medida nula. Como cada A_E^n tiene medida nula, podemos tomar O_n abierto tal que

$$A_E^n \subset O_n \quad \text{y} \quad \mu(O_n) < \tilde{\varepsilon}_n$$

para $\tilde{\varepsilon}_n$ por elegir. Definimos el calibre

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a,b] \backslash A_E, \\ \frac{\rho(x, \mathcal{C}O_n)}{2}, & \text{si } x \in A_E^n. \end{cases}$$

Si $\mathcal{P} = \{\xi_i, I_i\}$ es una partición etiquetada E-subordinada a δ, entonces:

$$\mathcal{S}(|f|, \mathcal{P}) = \sum_{\xi_i \in E \backslash A_E} |f(\xi_i)|\mu(I_i) + \sum_{\xi_i \in A_E} |f(\xi_i)|\mu(I_i)$$

$$= \sum_{\xi_i \in A_E} |f(\xi_i)|\mu(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\xi_i \in A_E^n} |f(\xi_i)|\mu(I_i)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\xi_i \in A_E^n} \mu(I_i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(O_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\varepsilon}_n.$$

Por tanto, eligiendo

$$\tilde{\varepsilon}_n = \frac{\varepsilon}{n2^n},$$

se tiene que

$$\mathcal{S}(|f|, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

■

Lema 3.11. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables en el sentido de Henstock definidas en $[a,b]$. Definimos*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n$$

para cada n, y suponemos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada puntualmente en $[a,b]$. Sea Z un subconjunto de $[a,b]$ de medida nula. Si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy generalizada en Z, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre δ en Z tal que

$$|F_n(\mathcal{P})| < \varepsilon$$

para todo n, siempre que $\mathcal{P}$ sea una familia de intervalos etiquetados disjuntos de Z-subordinada a δ.

Demostración. Sea $\tilde{\varepsilon} > 0$. Por hipótesis, existen un entero positivo N y un calibre δ_1 en Z tales que

$$|F_n(\mathcal{P}) - F_m(\mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon}$$

para todos $m, n \geq N$, siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición de Z subordinada a δ_1.

Como la sucesión $\{f_n\}$ está acotada puntualmente en Z, existe una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in Z \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular, podemos tomar $g(x) = \sup_n |f_n(x)|$, que está bien definida y finita en cada punto de Z.

Como Z es de medida nula, el Lema 3.10 aplicado a la función g garantiza que, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe un calibre δ_2 definido en Z tal que, para toda partición etiquetada $\mathcal{P}$ Z-subordinada a δ_2,

$$\mathcal{S}(g, \mathcal{P}) < \tilde{\varepsilon}.$$

Como $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n, se tiene la desigualdad

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P})| \leq \mathcal{S}(|f_n|, \mathcal{P}) \leq \mathcal{S}(g, \mathcal{P}) < \tilde{\varepsilon}.$$

Por la definición de la integral de Henstock, existe un calibre δ en $[a,b]$ tal que $\delta < \delta_2$ en Z y

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - F_n(\mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon}$$

para $1 \leq n \leq N$, siempre que $\mathcal{P}$ sea partición etiquetada subordinada a δ.

Ahora supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada Z-subordinada a δ. Entonces, para $1 \leq n \leq N$, se tiene

$$|F_n(\mathcal{P})| \leq |F_n(\mathcal{P}) - \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P})| + |\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = 2\tilde{\varepsilon}.$$

Asimismo, para $n > N$, aplicando que $\{f_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy y lo anterior,

$$|F_n(\mathcal{P})| \leq |F_n(\mathcal{P}) - F_N(\mathcal{P})| + |F_N(\mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon} = 3\tilde{\varepsilon}.$$

Sea $\varepsilon > 0$, eligiendo $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3}$, tenemos que

$$|F_n(\mathcal{P})| < \varepsilon$$

justo como queríamos probar. ■

Lema 3.12. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en $[a,b]$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$, entonces existe una sucesión $\{E_k\}$ de conjuntos cerrados tal que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada E_k, y el conjunto $[a,b] - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ tiene medida nula.*

Demostración. Aplicando el *Teorema de Egorov*, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto medible $H_k \subseteq [a,b]$ tal que $\mu\left([a,b] \backslash H_k\right) < \frac{1}{2k}$ y la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en H_k. Por el apartado (c) del Teorema 2.6, existe un conjunto cerrado $E_k \subseteq H_k$ tal que $\mu\left(H_k \backslash E_k\right) < \frac{1}{2k}$. Entonces

$$\mu\left([a,b] \backslash E_k\right) = \mu\left([a,b] \backslash H_k\right) + \mu\left(H_k \backslash E_k\right) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

y como $E_k \subseteq H_k$, la sucesión $\{f_n\}$ también converge uniformemente a f en E_k. Dado que

$$\mu\left([a,b] - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mu\left([a,b] - E_k\right) < \frac{1}{k}$$

para todo k, se sigue que

$$\mu\left([a,b] - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

Por tanto, $\{E_k\}$ es la sucesión buscada de conjuntos cerrados. ■

Lema 3.13. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables Henstock-Kurzweil definidas en $[a,b]$. Definimos*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n$$

para cada n, y suponemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$. Si la sucesión $\{f_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy generalizada en $[a,b]$, entonces existe una sucesión creciente $\{E_k\}$ de conjuntos cerrados en $[a,b]$ tal que $\mu(Z)=0$, donde

$$Z = [a,b] - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

y para cada k, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en E_k y la sucesión $\{f_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy en E_k.

Demostración. En primer lugar, escribimos

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

donde cada A_k es medible y la sucesión $\{f_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy en A_k, por hipótesis. Luego, aplicamos el *Teorema de Egorov* para escribir

$$[a,b] = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cup Z_0,$$

donde cada B_j es medible, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada B_j, y $\mu(Z_0)=0$, por el Lema 3.12. Para construir conjuntos en los que se verifiquen simultáneamente ambas propiedades, convergencia uniforme y ser $\mathcal{P}$-Cauchy. Consideramos, para cada par $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, los conjuntos

$$C_{j,k} := B_j \cap A_k.$$

En cada $C_{j,k}$, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f (pues $C_{j,k} \subseteq B_j$), y es $\mathcal{P}$-Cauchy (pues $C_{j,k} \subseteq A_k$). Además, se tiene

$$[a,b] = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup Z_0 = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} C_{j,k} \cup Z_0.$$

Puesto que la familia $\{C_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ está doblemente indexada, la reducimos a una única sucesión mediante una enumeración de los pares (j,k): definimos

$$C_n := C_{j(n),k(n)},$$

para alguna biyección $n \mapsto (j(n),k(n))$. De este modo, obtenemos una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles tal que, en cada C_n, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f y es $\mathcal{P}$-Cauchy. Así, podemos reescribir

$$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cup Z_0,$$

donde $\mu(Z_0) = 0$. Aplicando el apartado (c) del Teorema 2.6, para cada n podemos escribir,

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_n^i \cup Z_n,$$

donde $\{D_n^i\} \subseteq C_n$ es una sucesión creciente de cerrados tal que $\mu\left(C_n \setminus \bigcup_i D_n^i\right) = \mu(Z_n) = 0$. Finalmente, definimos

$$E_k := \bigcup_{n=1}^{k} D_n^k, \quad Z := Z_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n.$$

Cada E_k es un subconjunto cerrado de $[a,b]$, y claramente se tiene que $E_k \subseteq E_{k+1}$ para todo k, es decir, la sucesión $\{E_k\}$ es creciente. Por construcción, en cada E_k, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f y es $\mathcal{P}$-Cauchy, mientras que $\mu(Z) = 0$, como queríamos ver. ■

Teorema 3.14. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en el sentido de Henstock definidas en $[a,b]$. Definimos*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n$$

para cada n, y suponemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$.

Entonces, la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$ si y solo si la sucesión $\{F_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy generalizada en $[a,b]$.

Demostración. Supongamos primero que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$. Veamos que la sucesión $\{F_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy generalizada en $[a,b]$. Por el *Teorema de Convergencia Uniforme*, la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente en $[a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$, definimos

$$M_x = \sup_n \{|f_n(x)|\},$$

y para cada entero positivo k, definimos el conjunto

$$E_k = \{x \in [a,b] : k-1 \leq M_x < k\}.$$

Nótese que cada función f_n es integrable en el sentido de Henstock, por tanto es medible en el sentido de Lebesgue. Entonces, también lo es $|f_n|$, y por tanto la función

$$M(x) := \sup_n |f_n(x)|$$

es medible como supremo de funciones medibles. En consecuencia, el conjunto

$$E_k := \{x \in [a,b] : k-1 \leq M(x) < k\}$$

es medible. Además, se cumple que

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Por tanto, basta con demostrar que la sucesión $\{f_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy en cada conjunto E_k. Fijamos k y sea $\varepsilon > 0$. Sea $\tilde{\varepsilon} > 0$ por elegir. Por hipótesis, existe un calibre δ_1 en $[a, b]$ tal que

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - F_n(\mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon}$$

para todo n y toda partición etiquetada $\mathcal{P}$ subordinada a δ_1.

Aplicando la observación del *Teorema de Egorov*, existe un conjunto medible $H_k \subseteq E_k$ tal que $\mu(E_k \backslash H_k) < \tilde{\varepsilon}/k$ y $\{f_n\} \to f$ uniformemente en H_k. Denotamos $O_k := E_k \backslash H_k$, de modo que $\mu(O_k) < \tilde{\varepsilon}/k$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $E_k \backslash O_k$. Elegimos un entero positivo N tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{para todo } m, n \geq N \text{ y todo } x \in E_k \setminus O_k.$$

Definimos la función δ como

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & \text{si } x \in E_k \setminus O_k, \\ \text{mín}\{\delta_1(x), \rho(x, \mathcal{C}O_k)\}, & \text{si } x \in E_k \cap O_k. \end{cases}$$

Supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición E_k-subordinada a δ y que $m, n \geq N$. Sea $\mathcal{P}_1$ el subconjunto de $\mathcal{P}$ cuyas etiquetas pertenecen a $E_k \setminus O_k$ y sea $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$. Entonces

$$|F_n(\mathcal{P}) - F_m(\mathcal{P})| \leq \underbrace{|F_n(\mathcal{P}) - \mathcal{S}(f_n, \mathcal{P})|}_{\text{I}} + \underbrace{|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P})|}_{\text{II}} + \underbrace{|\mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}) - F_m(\mathcal{P})|}_{\text{III}}.$$

Estimamos cada término por separado:

- I y III: Como $\delta \leq \delta_1$ en todo punto, por hipótesis se tiene

  $$\text{I} < \tilde{\varepsilon} \quad \text{y} \quad \text{III} < \tilde{\varepsilon},$$

  lo cual se tiene por ser $\{f_n\}$ sucesión uniformemente integrable.

- II: Descomponemos la suma en dos partes según las etiquetas de la partición:

  $$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P})| \leq \underbrace{|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_1)|}_{\text{II}_1} + \underbrace{|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}_2) - \mathcal{S}(f_m, \mathcal{P}_2)|}_{\text{II}_2}.$$

  - II_1: Como en los puntos etiquetados de $\mathcal{P}_1$ se cumple $|f_n(x) - f_m(x)| < \tilde{\varepsilon}$, tenemos

    $$\text{II}_1 = \left| \sum_{(\xi_i, [c_i, d_i]) \in \mathcal{P}_1} (f_n(\xi_i) - f_m(\xi_i))(d_i - c_i) \right| < \tilde{\varepsilon} \cdot \mu(\mathcal{P}_1) \leq \tilde{\varepsilon}(b - a).$$

  - II_2: Por construcción, si $x_i \in O_k \cap E_k$, entonces $|f_n(x_i)| \leq k$ y $|f_m(x_i)| \leq k$ (por definición de E_k). Luego,

    $$\text{II}_2 \leq \sum_{(\xi_i, [c_i, d_i]) \in \mathcal{P}_2} |f_n(\xi_i) - f_m(\xi_i)|(d_i - c_i) \leq 2k \cdot \mu(\mathcal{P}_2) \leq 2k \cdot \mu(O_k) < 2k \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} = 2\tilde{\varepsilon}.$$

  Por tanto,

  $$\text{II} < \tilde{\varepsilon}(b - a) + 2\tilde{\varepsilon}.$$

Finalmente, sumando todas las estimaciones

$$|F_n(\mathcal{P}) - F_m(\mathcal{P})| < \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}(b-a) + 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(b-a+3).$$

Por tanto, eligiendo $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a+3}$ se tiene que

$$|F_n(\mathcal{P}) - F_m(\mathcal{P})| < \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión $\{F_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy en E_k. Como $[a,b] = \bigcup_k E_k$, concluimos que $\{F_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy generalizada en $[a,b]$.

Supongamos ahora que la sucesión $\{F_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy generalizada en $[a,b]$. Elegimos una sucesión creciente de conjuntos cerrados $\{E_k\}$ como en el Lema 3.13, y definimos

$$Z = [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y definamos, para cada entero positivo k,

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon \cdot 2^{-k-1}}{b-a+2}.$$

Para cada k, elegimos un entero positivo m_k y δ'_k calibre en E_k tal que

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon_k \quad \text{para todo } m, n \geq m_k \text{ y todo } x \in E_k,$$

y

$$|F_n(\mathcal{P}) - F_m(\mathcal{P})| < \varepsilon_k$$

para toda partición $\mathcal{P}$ E_k-subordinada a δ'_k, siempre que $m, n \geq m_k$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{m_k\}$ es creciente.

Para cada k, existe un calibre δ_k en $[a,b]$ tal que $\delta_k < \delta'_k$ en E_k y

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P}) - F_n(\mathcal{P})| < \varepsilon_k \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots, m_k,$$

siempre que $\mathcal{P}$ sea subordinada a δ_k.

Finalmente, aplicando los Lemas 3.10 y 3.11, existe un calibre δ_Z definido en Z tal que

$$|\mathcal{S}(f_n, \mathcal{P})| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad |F_n(\mathcal{P})| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo n, siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición con etiquetas en Z subordinada a δ_Z. Definimos $E_0 = \emptyset$, y consideramos un calibre δ en $[a,b]$ dado por:

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_k(x), & \text{si } x \in E_k \setminus E_{k-1}, \\ \delta_Z(x), & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ, y fijemos n. Definimos las subparticiones etiquetadas

$$\mathcal{P}_Z = \{(x, I) \in \mathcal{P} : x \in Z\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_k = \{(x, I) \in \mathcal{P} : x \in E_k \setminus E_{k-1}\},$$

para cada k. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P})-F_n(\mathcal{P})| &\le \sum_{k=1}^{\infty}|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}_k)-F_n(\mathcal{P}_k)|+|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}_Z)|+|F_n(\mathcal{P}_Z)|\\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}_k)-F_n(\mathcal{P}_k)|+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Fijamos ahora k. Si $n \le m_k$, entonces, por la elección de δ_k, se cumple que:

$$|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}_k)-F_n(\mathcal{P}_k)|<\varepsilon_k.$$

Si por el contrario $n > m_k$, entonces:

$$\begin{aligned}|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}_k)-F_n(\mathcal{P}_k)| &\le |\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}_k)-\mathcal{S}(f_{m_k},\mathcal{P}_k)|+|\mathcal{S}(f_{m_k},\mathcal{P}_k)-F_{m_k}(\mathcal{P}_k)|\\ &\quad+|F_{m_k}(\mathcal{P}_k)-F_n(\mathcal{P}_k)|\\ &<\varepsilon_k(b-a)+\varepsilon_k+\varepsilon_k=\varepsilon\cdot 2^{-k-1}.\end{aligned}$$

De ello se deduce que:

$$|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P})-F_n(\mathcal{P})| \le \sum_{k=1}^{\infty}|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}_k)-F_n(\mathcal{P}_k)|+\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon\cdot 2^{-k-1}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Por tanto, la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$. ■

El teorema anterior, podemos reescribirlo en lo que llamaremos como el *Teorema de Convergencia de Henstock*.

Teorema 3.15 (Teorema de Convergencia de Henstock)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en el sentido de Henstock definidas en $[a,b]$. Definimos*

$$F_n(x)=\int_a^x f_n$$

para cada n, y suponemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$. Si la sucesión $\{F_n\}$ es $\mathcal{P}$-Cauchy generalizada en $[a,b]$, entonces f es integrable en el sentido de Henstock en $[a,b]$ y se cumple que

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

El ejemplo más simple de una sucesión que no satisface las hipótesis ni del *Teorema de Convergencia Monótona* ni del *Teorema de Convergencia Dominada* para la integral de Lebesgue es el siguiente. Definamos la función

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right), & \text{si } 0<x\le 1,\\ 0, & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Para cada entero positivo n, definimos la función

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{si } 0\le x<\dfrac{1}{n},\\ F'(x), & \text{si } \dfrac{1}{n}\le x\le 1.\end{cases}$$

Entonces, la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a F' en $[0,1]$ y se verifica que

$$\int_0^1 F'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Es fácil comprobar que tampoco se cumplen las hipótesis del *Teorema de Convergencia Monótona* ni del *Teorema de Convergencia Dominada* para la integral de Henstock-Kurzweil, por lo que ninguno de estos teoremas es aplicable.

Sin embargo, como muestra el siguiente teorema, esta sucesión es uniformemente integrable en el sentido de Henstock en el intervalo $[0,1]$.

Teorema 3.16. *Supongamos que f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de puntos en el intervalo (a,b) tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Entonces, la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \le x < a_n, \\ f(x), & \text{si } a_n \le x \le b, \end{cases}$$

es uniformemente Henstock-integrable en $[a,b]$.

Demostración. Sea $F(x) = \int_a^x f$ para cada $x \in [a,b]$. Como F es continua en $[a,b]$ y $[a,b]$ es compacto, F es uniformemente continua. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon \quad \text{si } |y - x| < \eta.$$

Sea δ un calibre definido en $[a,b]$ tal que $\delta(x) < \eta$ para todo $x \in [a,b]$ y tal que, si $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ, entonces

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f\right| < \varepsilon.$$

Fijado n, sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ, y consideremos el subconjunto $\mathcal{P}_n$ formado por aquellos subintervalos cuyos puntos etiquetados pertenecen al intervalo $[a_n,b]$. La unión de los subintervalos en $\mathcal{P}_n$ es un intervalo de la forma $[y,b]$, con $|y-a_n| < \eta$, ya que $\delta(x) < \eta$ para todo x. Aplicamos ahora el *Lema de Saks-Henstock* para obtener

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{S}(f_n,\mathcal{P}) - \int_a^b f_n\right| &= \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_n) - \int_{a_n}^b f\right| \\ &\le |\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_n) - F(\mathcal{P}_n)| + |F(y) - F(a_n)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como esta estimación es válida para todo n natural y toda partición subordinada a δ, se concluye que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$. ■

Capítulo 4

Funciones ACG_δ e integral de Henstock

Dada una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, es conocido que para la integral de Lebesgue las siguientes condiciones son equivalentes (véase [4, p. 102]):

(a) F es absolutamente continua en $[a, b]$.

(b) $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$ para algún $f \in L^1([a, b])$.

(c) F es derivable en casi todo punto de $[a, b]$, $F' \in L^1([a, b])$, y se cumple que $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt$.

Conocido este resultado, es razonable plantearse si esta versión del segundo Teorema Fundamental del Cálculo es la más general posible. En esa dirección, se puede demostrar que si F es continua en $[a, b]$, su derivada existe en todo $[a, b]$ salvo en un conjunto numerable, y si F' es integrable, entonces F es absolutamente continua. Por tanto, por la caracterización anterior, se cumple que

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt,$$

como se muestra en la proposición 6.3.10 de [2].

Cabría plantearse la posibilidad de debilitar las condiciones. En particular, podríamos estudiar qué ocurre si eliminamos la hipótesis de integrabilidad de F', y la reemplazamos por pedir únicamente la finitud de F' en cada punto de $[a, b]$.

Un ejemplo clásico, extraído del ejemplo 6.1 [6], muestra que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

define una función continua en $[0, 1]$ cuya derivada F' es finita en cada punto de $[0, 1]$, pero, sin embargo, $F' \notin L^1([0, 1])$. De modo que la fórmula

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(x)\,dx$$

no se verifica.

Tampoco es factible mantener la integrabilidad de F' y debilitar su regularidad asumiendo únicamente que F es continua en $[a,b]$ y diferenciable en casi todo punto de $[a,b]$, como se evidencia en el ejemplo 8.20(b) de [8].

En este capítulo vamos a ver que la integral de Henstock-Kurzweil se caracteriza por una propiedad más general que la continuidad absoluta.

1. Funciones AC_δ y ACG_δ

Definición 4.1 (Función continua absolutamente respecto a un calibre)**.** *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, sea $E \subseteq [a,b]$. Decimos que la función $F \in AC_\delta$ es absolutamente continua en E respecto a δ si, para cada $\varepsilon > 0$, existen un número positivo η y un calibre δ sobre E tales que se cumple que $|F(\mathcal{P})| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea E-subordinada a δ y $\mu(\mathcal{P}) < \eta$.*

Definición 4.2 (Función continua absolutamente generalizada respecto a un calibre)**.** *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, sea $E \subseteq [a,b]$. Decimos que la función $F \in ACG_\delta$ es continua absolutamente generalizada en E si E puede escribirse como una unión numerable de conjuntos, sobre cada uno de los cuales la función F es AC_δ en E_n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observación. *De acuerdo con las definiciones, podemos decir que:*

$$AC_\delta \subseteq ACG_\delta.$$

Esto se debe a que si F es AC_δ en E, podemos escribir E como la unión numerable del mismo conjunto E repetido infinitamente (por trivialidad de la unión numerable). Dado que F es AC_δ en E, también lo es en cada subconjunto de la unión, por lo que $F \in ACG_\delta$.

Podemos relacionar estas nociones con AC, la continuidad absoluta clásica. Recordemos que una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta_\varepsilon > 0$ tal que, para cualquier colección finita de intervalos disjuntos dos a dos $\{(a_k, b_k)\}$ en $[a,b]$, se cumple

$$\sum_k |b_k - a_k| < \eta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sum_k |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Esta definición implica que una función absolutamente continua en el sentido clásico también es AC_δ, ya que tomando el calibre $\delta(x) = \eta_\varepsilon$ (constante para todo $x \in E$), donde η_ε es el δ de la definición clásica. Así, la condición de subordinación a δ se satisface automáticamente, y la implicación

$$\mu(\mathcal{P}) < \eta \implies |F(\mathcal{P})| < \varepsilon$$

coincide con la definición tradicional. Por tanto, podemos decir que

$$AC \subseteq AC_\delta,$$

sin embargo, el recíproco no es cierto, pues existen funciones AC_δ que no son de AC.

Dado esto, podemos establecer la siguiente jerarquía de clases de funciones:

$$AC \subseteq AC_\delta \subseteq ACG_\delta.$$

Es razonable pensar que las funciones que son ACG_δ son funciones continuas. El siguiente lema afirma esto.

Lema 4.3. *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es ACG_δ en $[a,b]$, entonces F es continua en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ donde F es AC_δ en cada E_n. Sea $c \in [a,b]$. Como c pertenece a al menos uno de los conjuntos E_n, fijemos un E_n tal que $c \in E_n$. Sea $\varepsilon > 0$. Como F es AC_δ en E_n, existen $\eta > 0$ y un calibre δ definido en E_n tales que para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}$ de E_n subordinada a δ con medida $\mu(\mathcal{P}) < \eta$, se cumple:

$$|F(\mathcal{P})| < \varepsilon.$$

Definimos $r = \frac{1}{2} \min\{\delta(c), \eta\}$. Consideramos $x \in \left(c - \frac{r}{2}, c\right)$ de manera que $|x - c| < \frac{r}{2}$ y

$$\mathcal{P} = \{(c, [x, c])\}.$$

Esta partición está subordinada al calibre δ porque la etiqueta c cumple $\delta(c) \geq \frac{r}{2}$. Además, su medida es $\frac{r}{2} \leq \frac{\eta}{2} < \eta$, por lo que satisface la condición de AC_δ. Entonces, aplicando la propiedad de AC_δ, si $|x - c| < \frac{r}{2}$ entonces

$$|F(x) - F(c)| < \varepsilon.$$

Análogamente llegamos a lo anterior si $x \in (c, c + \frac{r}{2})$. Esto implica que F es continua en c y como c es arbitrario en $[a,b]$, concluimos que F es continua en $[a,b]$. ■

Antes de llegar a la caracterización, es necesario el siguiente lema.

Lema 4.4. *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función AC_δ en $[a,b]$ y sea $E \subseteq [a,b]$. Si $\mu(E) = 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibre δ sobre E tal que $|F(\mathcal{P})| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea partición etiquetada subordinada a δ en E.*

Demostración. Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ donde los conjuntos E_n son disjuntos dos a dos y F es AC_δ en cada conjunto E_n. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada n, existe un calibre δ_n sobre E_n y un número positivo η_n tal que $|F(\mathcal{P})| < \varepsilon/2^n$ siempre que $\mathcal{P}$ sea subordinada a δ_n en E_n y $\mu(\mathcal{P}) < \eta_n$.

Para cada n, elegimos un conjunto abierto O_n tal que $E_n \subseteq O_n$ y $\mu(O_n) < \eta_n$. Definimos el calibre $\delta(x) = \min\{\delta_n(x), \rho(x, \mathcal{C}O_n)\}$ para $x \in E_n$.

Supongamos que $\mathcal{P}$ es subordinada a δ en E. Sea $\mathcal{P}_n$ el subconjunto de $\mathcal{P}$ que tiene etiquetas en E_n y notemos que $\mu(\mathcal{P}_n) < \mu(O_n) < \eta_n$. Por lo tanto, tenemos

$$|F(\mathcal{P})| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} F(\mathcal{P}_n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |F(\mathcal{P}_n)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Esto concluye la demostración. ■

2. Caracterización de la integral de Henstock

Ahora ya estamos en condiciones de introducir la caracterización. El teorema nos dice que las funciones integrables Henstock-Kurzweil son exactamente aquellas que son derivadas de funciones ACG_δ.

- Por un lado, si f es integrable Henstock-Kurzweil, podemos construir una función $F(x) = \int_a^x f$ que es ACG_δ y cuya derivada F' coincide con f en casi todo punto.

- Por otro lado, si existe una función F de tipo ACG_δ tal que $F' = f$ casi en todo punto, entonces f es integrable Henstock-Kurzweil.

Teorema 4.5. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ si y solo si existe una función $F \in ACG_\delta$ tal que $F' = f$ casi en todo punto de $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos primero que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Henstock en $[a, b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f$ para cada $x \in [a, b]$. Por el Teorema 2.12, F es derivable y de hecho $F' = f$ en casi todo punto de $[a, b]$. Para cada entero positivo definimos

$$E_n = \{x \in [a, b] : n - 1 \leq |f(x)| < n\}.$$

Es claro que $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ahora veamos que $F \in AC_\delta$ en cada conjunto E_n. Esto probará que $F \in ACG_\delta$. Para ello, fijemos n. Sea $\varepsilon > 0$. Para $\tilde{\varepsilon} > 0$ por elegir, tenemos que como f es integrable en $[a, b]$ existe un calibre δ sobre $[a, b]$ tal que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \int_a^b f| < \tilde{\varepsilon}$$

para toda partición $\mathcal{P}$ etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ. Como para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tenemos que $F(\mathcal{P}) = \int_a^b f$, lo anterior, de hecho, nos dice que para toda partición etiquetada $\mathcal{P}$ subordinada a δ,

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - F(\mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Sea $\eta = \frac{\tilde{\varepsilon}}{n}$. Supongamos que $\mathcal{P}$ es E_n-subordinada a δ y que $\mu(\mathcal{P}) < \eta$. Teniendo en cuenta (4.1), utilizando el *Lema de Saks-Henstock* tenemos que:

$$|F(\mathcal{P})| \leq |F(\mathcal{P}) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P})| + |\mathcal{S}(f, \mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon} + |\mathcal{S}(f, \mathcal{P})|.$$

Como $\mathcal{P}$ es E_n-Subordinada, $|f(\xi_i)| < n$ para toda etiqueta ξ_i de $\mathcal{P}$, de manera que:

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P})| \leq n\mu(\mathcal{P}) < n\frac{\tilde{\varepsilon}}{n} = \tilde{\varepsilon}.$$

Por tanto, $|F(\mathcal{P})| < 2\tilde{\varepsilon}$ y tomando $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos que si $\mathcal{P}$ es una partición E_n-subordinada a δ y $\mu(\mathcal{P}) < \eta = \frac{\varepsilon}{2n}$ entonces

$$|F(\mathcal{P})| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $F \in AC_\delta$ en E_n y por tanto, $F \in ACG_\delta$ en E como queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que existe una función $F \in ACG_\delta$ en $[a, b]$ tal que $F' = f$ para casi todo punto en $[a, b]$. Consideremos

$$E = \{x \in [a, b] : F'(x) \neq f(x)\}.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $\tilde{\varepsilon} > 0$ por elegir. Para cada $x \in [a, b] \backslash E$, dado que $F'(x) = f(x)$, podemos fijar $\delta_0(x) > 0$ tal que

$$|F(y) - F(x) - f(x)(y - x)| < \tilde{\varepsilon}|y - x|$$

siempre que $|y - x| < \delta_0(x)$, $y \in [a, b]$, aplicando la definición de derivada en un punto, como ya hicmos en algún otro momento. Por los Lemas 3.10 y 4.4 podemos definir calibres δ_1 y δ_2 respectivamente tales que si $\mathcal{P}$ es $E-$subordinada a δ_1 entonces

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon} \tag{4.2}$$

y si $\mathcal{P}$ es $E-$subordinada a δ_2 entonces

$$|F(\mathcal{P})| < \tilde{\varepsilon}. \tag{4.3}$$

Definimos

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{mín}\{\delta_0(x), \delta_1(x), \delta_2(x)\}, & \text{si } x \in E, \\ \delta_0(x), & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Supongamos que $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, x_{i+1}]), i = 1, ..., n\}$. Sea $\mathcal{P}_E$ la subpartición etiquetada que tiene etiquetas en E y llamemos $\mathcal{P}_d = \mathcal{P} \backslash \mathcal{P}_E$. Entonces,

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - F(\mathcal{P})| \leq \underbrace{|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_d) - F(\mathcal{P}_d)|}_{\text{I}} + \underbrace{|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_E)|}_{\text{II}} + \underbrace{|F(\mathcal{P}_E)|}_{\text{III}}.$$

Para estimar I, observamos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_d) - F(\mathcal{P}_d)| &= \left| \sum_{(\xi_i,[t_i,t_{i+1}])\in\mathcal{P}_d} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) - \sum_{(\xi_i,[t_i,t_{i+1}])\in\mathcal{P}_d} (F(t_{i+1}) - F(t_i)) \right| \\
&\leq \sum_{(\xi_i,[t_i,t_{i+1}])\in\mathcal{P}_d} |f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) - (F(t_{i+1}) - F(t_i))| \\
&= \sum_{(\xi_i,[t_i,t_{i+1}])\in\mathcal{P}_d} \Big| F(t_{i+1}) - F(\xi_i) - f(\xi_i)(t_{i+1} - \xi_i) \\
&\quad + F(\xi_i) - F(t_i) - f(\xi_i)(\xi_i - t_i) \Big| \\
&\leq \sum_{(\xi_i,[t_i,t_{i+1}])\in\mathcal{P}_d} |F(t_{i+1}) - F(\xi_i) - f(\xi_i)(t_{i+1} - \xi_i)| \\
&\quad + |F(t_i) - F(\xi_i) + f(\xi_i)(\xi_i - t_i)|.
\end{aligned}$$

Ahora usando que $|t_{i+1} - \xi_i| < \delta(\xi_i)$ y $|\xi_i - t_i| < \delta(\xi_i)$ por ser $\mathcal{P}$ partición etiquetada subordinada a δ

$$|F(t_{i+1}) - F(\xi_i) - f(\xi_i)(t_{i+1} - \xi_i)| < \tilde{\varepsilon}(t_{i+1} - \xi_i)$$

y

$$|F(t_i) - F(\xi_i) + f(\xi_i)(\xi_i - t_i)| < \tilde{\varepsilon}(\xi_i - t_i).$$

Por tanto,

$$\text{I} < \sum_{(\xi_i,[t_i,t_{i+1}])\in\mathcal{P}_d} \tilde{\varepsilon}(t_{i+1} - \xi_i) + \tilde{\varepsilon}(\xi_i - t_i) = \tilde{\varepsilon} \sum_{(\xi_i,[t_i,t_{i+1}])\in\mathcal{P}_d} (t_{i+1} - t_i) \leq \tilde{\varepsilon}(b - a).$$

Para los términos II y III, se tiene que II $\leq \tilde{\varepsilon}$ y III $\leq \tilde{\varepsilon}$, como se deduce de (4.2) y (4.3), respectivamente. Por tanto,

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - F(\mathcal{P})| \leq \tilde{\varepsilon}(b - a) + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = (b - a + 2)\tilde{\varepsilon}.$$

Tomando $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{(b-a)+2}\varepsilon$ acabamos de probar que si $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada subordinada a δ entonces, como $F(\mathcal{P}) = F(b) - F(a)$, se tiene que

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - (F(b) - F(a))| < |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - F(\mathcal{P})| < \varepsilon.$$

Esto prueba que f es Henstock integrable en $[a, b]$ y que $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. ■

Ejemplo 4.6. *En la introducción mencionamos que la función*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

es ACG_δ. Observemos que,

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Por el teorema anterior, la función f es una función integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil. Además, se puede comprobar que dicha función no es integrable en el sentido de Lebesgue.

Probar que la función F es ACG_δ no es fácil, y una forma relativamente directa es usando el siguiente teorema, extraído del Teorema 6.22 de [5], sin embargo, la prueba es algo extensa y se sigue de una serie de resultados.

Teorema 4.7. *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ y sea $E \subseteq [a, b]$ un conjunto cerrado. Si F es continua en E y para cada $x \in E$ salvo a lo sumo un conjunto numerable se verifica alguna de las dos siguientes condiciones*

$$-\infty < D_+F(x) \leq D^+F(x) < \infty \qquad o \qquad -\infty < D_-F(x) \leq D^-F(x) < \infty$$

entonces F es ACG_δ en E.

Para aplicar el Teorema 4.7 a la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

comenzamos verificando que F es continua en todo el intervalo $[0, 1]$. Para $x > 0$, la función está definida como composición de funciones continuas, y en $x = 0$ se tiene que

$$|F(x)| = \left| x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) \right| \leq x^2,$$

lo que implica que $\lim_{x\to 0} F(x) = 0 = F(0)$, de modo que F es continua en todo $[0, 1]$.

Para verificar las condiciones del teorema, analizamos las derivadas superior e inferior por la derecha. En el intervalo $(0, 1]$, la función es derivable y su derivada está dada por

$$F'(x) = 2x \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right),$$

la cual está definida para todo $x > 0$, por lo que se concluye que $D_+F(x) = D^+F(x) = F'(x)$ y, por tanto, son finitas en $(0, 1]$. En el punto $x = 0$, se analiza la expresión

$$\frac{F(y) - F(0)}{y - 0} = \frac{y^2 \cos\left(\frac{\pi}{y^2}\right)}{y} = y \cos\left(\frac{\pi}{y^2}\right),$$

la cual está acotada en valor absoluto por y y tiende a 0 cuando $y \to 0^+$. Como el supremo e ínfimo de esta expresión en intervalos $(0, \delta)$ también tienden a 0 al hacer $\delta \to 0^+$, se concluye que $D^+F(0) = D_+F(0) = 0$. Así, las derivadas superior e inferior por la derecha existen y son finitas en todo $[0, 1]$.

Dado que $[0, 1]$ es cerrado, F es continua en él y las condiciones del teorema se verifican en todos los puntos del intervalo, concluimos que $F \in ACG_\delta([0, 1])$.

Apéndice A

Integral de Riemann

La integral de Riemann fue propuesta en 1854 por el matemático alemán Bernhard Riemann, con el objetivo de definir rigurosamente el área de una región del plano limitada por la gráfica de una función. La idea central consiste en aproximar el área bajo una curva mediante sumas de áreas de rectángulos. Para ello, se divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos y se evalúa la función en un punto arbitrario dentro de cada subintervalo. La suma de las áreas de los rectángulos obtenidos da lugar a las llamadas *sumas de Riemann*.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Dada una partición $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, y dada una elección de puntos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, la suma de Riemann asociada a f es

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Si al refinar la partición, todas estas sumas convergen al mismo valor, se dice que f es integrable en el sentido de Riemann, y ese valor común es la integral de Riemann de f en $[a, b]$.

Aunque la definición anterior permite aproximar el área bajo la curva, no proporciona por sí sola una estimación precisa del error ni una caracterización inmediata de la integrabilidad. Para mejorar esta idea, en lugar de elegir puntos arbitrarios en los subintervalos, podemos acotar el valor de la función mediante su ínfimo y supremo en cada subintervalo. Esta alternativa nos conduce a la formulación de la integral de Darboux.

Concretamente, sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sea $R(f, a, b)$ dicha región del plano limitada por las rectas $X = a, X = b, Y = 0$ y la gráfica de f, es decir,

$$R(f, a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Consecuencia de la propiedad de monotonía, el área de la región anterior es fácilmente acotable entre dos rectángulos. El área de $R(f, a, b)$ debe ser mayor que un rectángulo contenido en $R(f, a, b)$, y debe ser menor que un rectángulo que contenga $R(f, a, b)$, es decir:

$$(b - a) \operatorname{ínf} f([a, b]) \leq \text{área de} \quad R(f, a, b) \leq (b - a) \sup f([a, b])$$

Las desigualdades anteriores nos permiten estimar el área de $R(f, a, b)$, aunque, podemos dar una mejor estimación. Podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos mediante $n + 1$ puntos $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ y acotar el área de $R(f, a, b)$ por la suma de las áreas de los rectángulos contenidos en $R(f, a, b)$, por una parte, y por la suma de las áreas de los rectángulos que contienen a $R(f, a, b)$, por otra. Es decir, si denotamos $m_i = \text{ínf}\, f([t_{i-1}, t_i])$ y $M_i = \sup f([t_{i-1}, t_i])$, debería ocurrir que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq \text{ área de } R(f, a, b) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Estas son las ideas que subyacen sobre la integral de Riemann y Darboux, que vamos a formalizar a continuación, y que principalmente ha sido basada en el libro *Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane* [7].

0.1. Integral de Riemann

Definición A.1 (Partición de un intervalo)**.** *Si $a < b$, llamaremos partición del intervalo $[a, b]$ a cualquier conjunto finito ordenado de puntos del intervalo $[a, b]$ que contiene a los puntos a y b, es decir, $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = b$. Al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$ lo denotaremos por $\mathcal{P}([a, b])$ o, si el contexto lo permite, $\mathcal{P}$.*

Definición A.2 (Intervalo etiquetado y partición etiquetada)**.** *Un intervalo etiquetado $(\xi, [c, d])$ de $I = [a, b]$ consiste en un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ y un punto $\xi \in [c, d]$, el cual será denominado como la etiqueta del intervalo. Una partición etiquetada $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 1 \leq i \leq n\}$ es una colección de intervalos etiquetados no superpuestos.*

Definición A.3 (Suma de Riemann)**.** *Sea $\mathcal{P} = \{(\xi_i, [t_i, t_{i+1}]) : 1 \leq i \leq n\}$ una partición etiquetada del intervalo $[a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$. La suma de Riemann asociada de f asociada a $\mathcal{P}$ es:*

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Ahora ya estamos en condiciones de definir la integral de Riemann.

Definición A.4 (Integral de Riemann)**.** *Sea $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$, decimos que f tiene como integral de Riemann en I el número real L si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un δ_ε tal que si $\mathcal{P}$ es cualquier partición etiquetada cumpliendo $t_{i+1} - t_i < \delta_\varepsilon$ para todo $i = 1, ..., n$ entonces*

$$|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - L| < \varepsilon$$

De existir la integral de f en $[a, b]$ la denotaremos como $\int_a^b f = L$ y diremos que f es Riemann integrable.

Proposición A.5. *Si f es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$, entonces el valor de la integral es único.*

Demostración. Supongamos que f es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$ y que tanto A como B satisfacen la definición de integrabilidad. Fijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos δ_A y δ_B correspondientes a A y B, tales que $|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta = \text{mín}(\delta_A, \delta_B)$ y supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición con $t_{i+1} - t_i < \delta$ para todo $0 \leq i \leq n$, y por lo tanto menor que δ_A y δ_B. Entonces,

$$|A - B| \leq |A - \mathcal{S}(f, \mathcal{P})| + |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

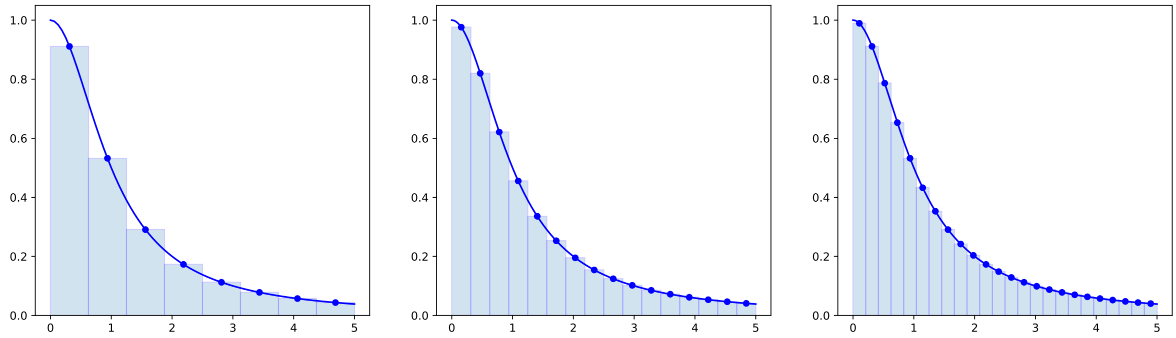


Figura A.1: Comportamiento de la Integral de Riemann frente a la partición etiquetada escogida

Haciendo ε lo suficientemente pequeño, se tiene que $A = B$. Por lo tanto, el valor de la integral es único. ■

La integral de Riemann es adecuada para funciones continuas, o con pocos puntos de discontinuidad. Sin embargo, no es adecuada para funciones con muchas discontinuidades, como se muestra en el ejemplo A.6.

Ejemplo A.6. *Sea la función de Diritchlet* $h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P}_r = \{(r_i, [t_i, t_{i+1}]) : 1 \leq i \leq n\}$ *y* $\mathcal{P}_q = \{(r_i, [t_i, t_{i+1}]) : 1 \leq i \leq n\}$ *dos particiones etiquetadas. En* $\mathcal{P}_r$ *consideramos la etiqueta un números racionales de cada subintervalo y e en* $\mathcal{P}_q$ *consideramos la etiqueta un números irracionales. Entonces, las sumas de Riemann asociadas son:*

$$f\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_r) = \sum_{i=0}^{n} f(r_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n} 0(t_{i+1} - t_i) = 0$$

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_q) = \sum_{i=0}^{n} f(q_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) = 1$$

Así, sin importar cuán fina sea la partición, siempre podemos encontrar un conjunto de puntos de modo que la suma de Riemann correspondiente sea igual a 0 y otro conjunto de modo que la suma de Riemann correspondiente sea igual a 1. Ahora, supongamos que f *fuera integrable en el sentido de Riemann con integral A. Fijemos* $\varepsilon < \frac{1}{2}$ *y elijamos un* δ *correspondiente. Si* $\mathcal{P}$ *es cualquier partición con* $t_{i+1} - t_i < \delta$ *para todo* $0 \leq i \leq n$ δ, *entonces*

$$\begin{aligned} 1 &= |f\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_q) - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_r)| \\ &\leq |\mathcal{S}(f, \mathcal{P}_q) - A| + |A - \mathcal{S}(f, \mathcal{P}_r)| < \varepsilon + \varepsilon < 1 \end{aligned}$$

Esta contradicción muestra que f *no es integrable en el sentido de Riemann.*

Para concluir la sección, enunciaremos un teorema de propiedades básicas de la integral de Riemann, que no demostraremos.

Teorema A.7. *Sea f y g funciones integrables Riemann en $[a, b]$. Entonces,*

a) cf es integrable Riemann en $[a, b]$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$, para cada $c \in \mathbb{R}$.

b) $f + g$ es integrable Riemann en $[a, b]$ y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

c) Si $f \leq g$ en casi todo punto de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

d) Si $f = g$ en casi todo punto de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f = \int_a^b g$

0.2. Integral de Riemann-Darboux

Definición A.8 (Suma superior e inferior). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ sean m_i y M_i los números*

$$M_i = M_i(f) = \sup f\left([t_{i-1}, t_i]\right) \quad m_i = m_i(f) = \text{ínf}\, f\left([t_{i-1}, t_i]\right)$$

Llamaremos suma superior de f relativa a la partición P al número

$$\mathcal{U}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(t_i - t_{i-1}\right)$$

Llamaremos suma inferior de f relativa a la partición P al número

$$\mathcal{L}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(t_i - t_{i-1}\right)$$

La partición elegida tiene un papel importante en como es la aproximación de dicho área. Debido a esto, surge el concepto de *partición más fina.*

Definición A.9. *Sean P y Q dos particiones del intervalo $[a, b]$. Se dice que Q es más fina que P si $P \subset Q$.*

El siguiente teorema, que no probaremos relaciona las sumas superiores e inferiores definidas anteriormente con una partición mas fina que otra.

Teorema A.10. *Sea f acotada en $[a, b]$ y sean P y Q particiones de $[a, b]$ con Q más fina que P entonces*

$$\mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{L}(f, Q) \leq \mathcal{U}(f, Q) \leq \mathcal{U}(f, P)$$

Teorema A.11. *Sea f acotada en $[a, b]$ y sean P_1 y P_2 particiones cualesquiera de $[a, b]$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left(f, P_1\right) \leq \mathcal{U}\left(f, P_2\right)$$

Demostración. Sea $Q = P_1 \cup P_2$. Entonces Q es más fina que P_1 y que P_2, por tanto:

$$\mathcal{L}\left(f, P_1\right) \leq \mathcal{L}\left(f, Q\right) \leq \mathcal{U}\left(f, Q\right) \leq \mathcal{U}\left(f, P_2\right)$$

■

Ahora, usando las sumas superiores e inferiores y tomando particiones lo suficientemente finas estamos en condiciones para introducir la definición de integral superior e integral inferior, las cuales serán la pieza fundamental para definir la integral de una función en el sentido de Riemann.

Para ello, sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$ y sea $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Consideremos el conjunto

$$\{\mathcal{L}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\},$$

que no es vacío pues contiene al número $(b-a)\inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Si Q es una partición de $[a, b]$, del teorema anterior se sigue que

$$\mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{U}(f, Q) \quad \text{para toda } P \in \mathcal{P}([a, b]),$$

luego el conjunto $\{\mathcal{L}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ está acotado superiormente por $U(f, Q)$. Por tanto, tiene supremo. Llamaremos *integral inferior* de f en $[a, b]$ al número

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\mathcal{L}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Según hemos visto, si Q es una partición de $[a, b]$, $\mathcal{U}(f, Q)$ es cota superior del conjunto $\{\mathcal{L}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$, luego

$$\underline{\int_a^b} f \leq \mathcal{U}(f, Q) \quad \text{para toda } Q \in \mathcal{P}([a, b]).$$

Tenemos pues que el conjunto $\{\mathcal{U}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$, que no es vacío, está acotado inferiormente por $\underline{\int_a^b} f$, luego tiene ínfimo. Llamaremos *integral superior* de f en $[a, b]$ al número

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{\mathcal{U}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Como $\underline{\int_a^b} f$ es una cota inferior del conjunto $\{\mathcal{U}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$, entonces

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Además, la definición de integral inferior y de integral superior nos da que si P y Q son particiones de $[a, b]$, entonces

$$\mathcal{L}(f, P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \mathcal{U}(f, Q).$$

Definición A.12. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Diremos que f es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$ si*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Si f es integrable en $[a, b]$, llamaremos integral de f en $[a, b]$ al número

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Si f es integrable en $[a,b]$ y además es $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, llamaremos área de $R(f,a,b)$ al número $\int_a^b f$.

Ejemplo A.13. *Probar que $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$ considerando particiones en n subintervalos iguales.*

Sea $f(x) = x^3$. Consideremos las particiones de $[0,b]$ $P_n = \{t_0, ..., t_n\}$ de manera que $t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$ para $0 \leq i \leq n$, es decir, una partición regular de n subintervalos. Dado que la función f es monótonamente creciente se tendrá que $m_i = (t_{i-1})^3$ y $M_i = (t_i)^3$. Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (t_i)^3 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i\frac{b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \frac{(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene $\mathcal{L}(f, P_n) = \frac{b^4}{n^4}\frac{(n+1)^2}{4}$, de donde podemos concluir que

$$\inf \mathcal{U}(f, P_n) = \sup \mathcal{L}(f, P_n) = \frac{b^4}{4}$$

lo que concluye la prueba.

Para finalizar con este breve acercamiento a la integral de Riemann, vamos a enunciar el criterio de integrabilidad de Riemann, que nos asegura que una función acotada es integrable en el sentido de Riemann si existe una partición tal que la diferencia entre la suma superior e inferior es lo suficientemente pequeña.

Teorema A.14 (Criterio de Integrabilidad de Riemann)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es integrable en $[a,b]$ si, y solo si, para cada $\varepsilon \geq 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que*

$$\mathcal{U}(f, P) - \mathcal{L}(f, P) \leq \varepsilon$$

Bibliografía

[1] AMS :: Proceedings of the American Mathematical Society, Series B.

[2] Donald L. Cohn. *Measure theory.* Birkhäuser, Boston, MA, 1980. MR0578344, Reviewer: Dieter Hoffmann.

[3] Departamento de Análisis Matemático. Apuntes de teoría de la medida, 2023. Curso del Grado en Matemáticas, Universidad de Málaga.

[4] Gerald B. Folland. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984. MR0767633.

[5] Russell A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, volume 4 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, 1994. Anna's Archive, e113c63b5174de2eaab19132112afe4a.

[6] R. L. Jeffery. *The theory of functions of a real variable.* Number No. 6 in Mathematical Expositions. University of Toronto Press, Toronto, ON, 1951. MR0043162, Reviewer: U. S. Haslam-Jones.

[7] Douglas S. Kurtz and Jaroslav Kurzweil. *Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane.* Number v. 13 in Series in real analysis. World Scientific, New Jersey, 2nd ed edition, 2012.

[8] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London, 1966.

[9] Michael Spivak. *Calculus.* Editorial Reverte,, Barcelona, [third edition (fourth english edition)] edition, 2018. OCLC: 1233320519.